Matematika II (FKKT – Kemijsko inženirstvo)

Matjaž Željko

FKKT – Kemijsko inženirstvo

2. teden

(Zadnja sprememba: 23. maj 2013)

Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ odprta množica in $F: D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Navadna *diferencialna enačba* je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko $y = y(x)$ in njenimi odvodi $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, torej zveza

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{1}$$

Običajno namesto $y(x)$, $y'(x)$, ... pišemo y, y', ...

Zgled

Za funkcijo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $F(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1 x_2 - \sin x_1$, je pripadajoča enačba enaka $y' + xy - \sin x = 0$.

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda iskane funkcije v enačbi. *Stopnja diferencialne enačbe* je najvišja potenca najvišjega odvoda iskane funkcije v enačbi.

Zgled

Določi red in stopnjo naslednjih diferencialnih enačb

$$y' = 2xy + x^2, \tag{2}$$
$$y'' + 3y' - 7 = e^{-x} \cos x, \tag{3}$$
$$(y')^3 = y' - x. \tag{4}$$

Rešitev diferencialne enačbe (1) reda n na intervalu $I = (a, b)$ je vsaka funkcija $f: I \to \mathbb{R}$, ki je na tem intervalu n-krat odvedljiva in za vsak $x \in I$ zadošča enačbi

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{5}$$

Rešiti diferencialno enačbo pomeni poiskati vse funkcije, ki tej enačbi zadoščajo. Običajno je, da ima diferencialna enačba reda n rešitev, ki je odvisna od več (običajno n) parametrov. Taki rešitvi pravimo *splošna rešitev*. Če v splošni rešitvi izberemo parametre, dobimo natanko eno določeno rešitev iz te družine, ki ji pravimo *partikularna rešitev*.

Precej pogosto določimo partikularno rešitev tako, da predpišemo *začetne vrednosti*

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

ali pa *robne vrednosti*

$$y(x_0) = a_0, y'(x_1) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_n) = a_{n-1},$$

kjer števila x_0, x_1, ..., x_n niso vsa enaka.

Možno je, da premore diferencialna enačba tudi rešitve, ki jih ne moremo dobiti s primerno izbiro parametrov v splošni rešitvi. Takim rešitvam pravimo *singularne rešitve*.

Zgled

Diferencialna enačba $(y')^2 = 4y$ ima poleg splošne rešitve $y(x) = (x+C)^2$ še singularno rešitev $y(x) = 0$.

Zgled

Funkcija $y(x) = \sin(2x)$ je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 4y = 0$ na celi realni osi.

Zgled

Poišči tako rešitev diferencialne enačbe $y'' + 4y = 0$, ki zadošča pogoju $y(0) = y'(0) = 1$.

Zgled

Poišči vse funkcije, ki zadoščajo enačbi $y' = 0$.

Diferencialne enačbe prvega reda

Splošno diferencialno enačbo prvega reda podamo v obliki

$$F(x,y,y')=0.$$

Njena rešitev je enoparametrična družina krivulj $y=f(x,C)$, kjer je $C\in\mathbb{R}$ parameter. Partikularno rešitev dobimo tako, da predpišemo pogoj, ki mu mora ta rešitev zadoščati. Običajno podamo vrednost v neki točki, torej $y(x_0)=y_0$.
Diferencialni enačbi skupaj z začetnim pogojem

$$F(x,y,y')=0, \qquad y(x_0)=y_0, \tag{6}$$

pravimo *začetni problem*.

Obstoj in enoličnost rešitve

Če je funkcija F dovolj lepa, lahko enačbo $F(x,y,y')=0$ preoblikujemo v diferencialno enačbo $y'=f(x,y)$, ki premore (lokalno) enolično rešitev. Natančneje:

Izrek (Picardov izrek)

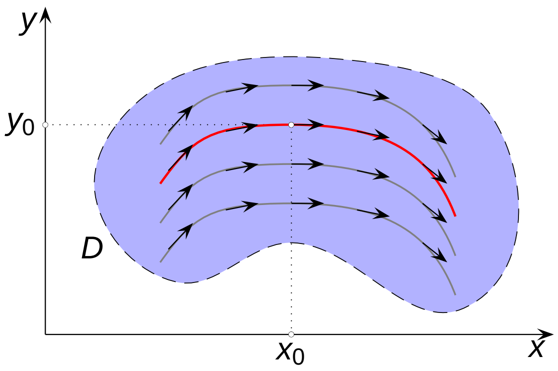
Naj bo $D\subset\mathbb{R}^2$ odprta množica. Če je funkcija $f\colon D\to\mathbb{R}$ zvezna in zvezno parcialno odvedljiva na y, ima za vsako točko $(x_0,y_0)\in D$ v neki okolici točke x_0 diferencialna enačba

$$y'=f(x,y)$$

natanko eno rešitev, ki ustreza pogoju $y(x_0)=y_0$.

Polje smeri

Polje smeri diferencialne enačbe $y'=f(x,y)$ dobimo tako, da v vsaki točki $(x,y)\in D$ narišemo vektor s smernim koeficientom $y'=f(x,y)$.



Označena rešitev $y=y(x)$ zadošča začetnemu pogoju $y(x_0)=y_0$.

Grafi rešitev potekajo po ravnini tako, da imajo v vsaki točki $(x,y)\in D$ isto smer tangente kot vektor polja smeri v tisti točki.

Velja tudi obratno. Krivulja, ki ima v vsaki točki $(x,y)\in D$ za smerni koeficient ravno vrednost funkcije f v točki (x,y), je rešitev enačbe $y'=f(x,y)$.

Enačba z ločljivima spremenljivkama

Če lahko enačbo $F(x,y,y')=0$ zapišemo v obliki $y'=h(x)g(y)$, pravimo, da ima enačba *ločljivi spremenljivki*. Ker je $y'=\frac{dy}{dx}$, lahko zapišemo $\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$, kar nam da

$$\frac{dy}{g(y)}=h(x)dx.$$

Torej je splošna rešitev enaka

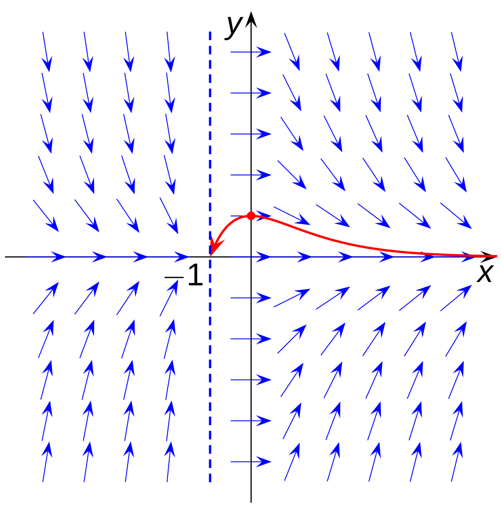
$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int h(x)\,dx+C,$$

ki jo lahko zapišemo v obliki $G(y)=H(x)+C$. Za partikularno rešitev, ki npr. ustreza pogoju $y(x_0)=y_0$, pa velja $G(y_0)=H(x_0)+C$. Torej je

$$C=G(y_0)-H(x_0).$$

Zgled

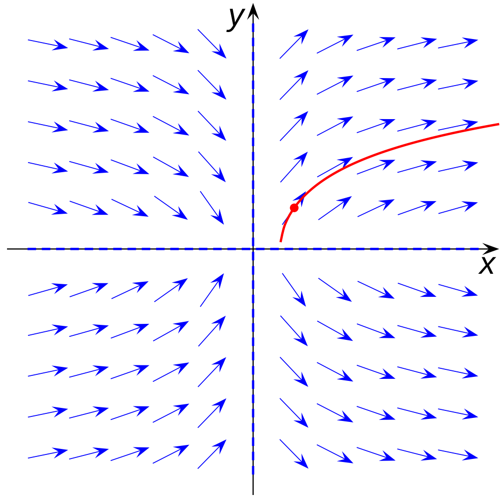
Poišči splošno rešitev enačbe $xy+(x+1)y'=0$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(0)=1$.



Slika : Polje smeri diferencialne enačbe $y'=-\frac{xy}{x+1}$ in rešitev $y=(x+1)e^{-x}$, $y(0)=1$.

Zgled

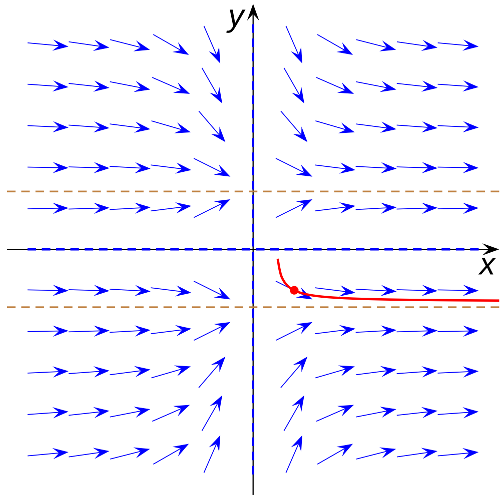
Poišči splošno rešitev enačbe $\sqrt{y^2+1} = xyy'$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = 1$.



Slika : Polje smeri diferencialne enačbe $y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$ in rešitev $y = \sqrt{\ln^2 x + 2\sqrt{2}\ln x + 1}$, $y(0) = 1$.

Zgled

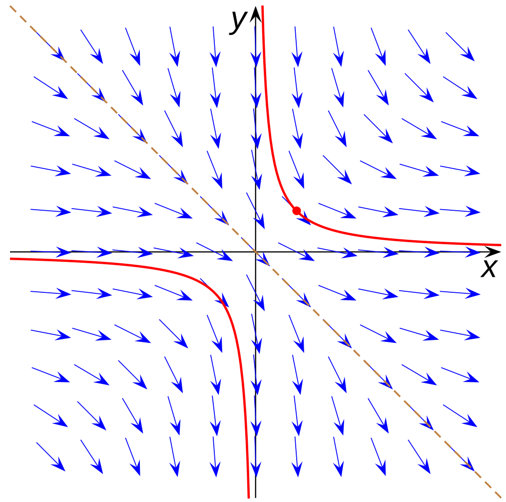
Poišči splošno rešitev enačbe $2x^2yy' + y^2 = 2$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = -1$.



Slika : Polje smeri diferencialne enačbe $y' = \frac{2-y^2}{2x^2y}$ in rešitev $y = -\sqrt{2 - e^{\frac{1}{x}-1}}$, $y(1) = -1$.

Zgled

Poišči splošno rešitev enačbe $(1+x^2)y'+(1+y^2)=0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(1)=1$.

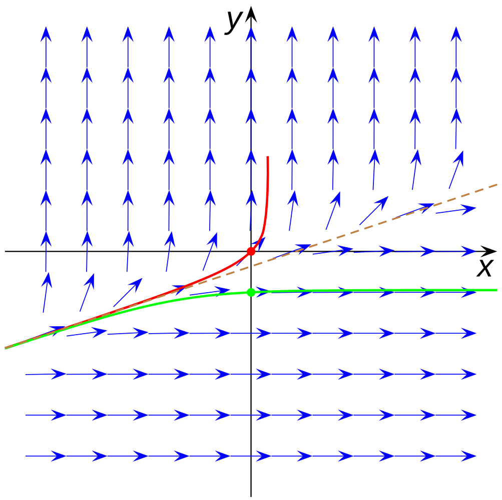


Slika : Polje smeri diferencialne enačbe $y'=-\frac{1+y^2}{1+x^2}$ in rešitev $y=\frac{1}{x}$, $y(1)=1$.

Zgled

Poišči splošno rešitev enačbe $e^{x+2y}-e^{2x-y}y'=0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(0)=0$. *Zapiši še rešitev, za katero velja* $y(0)=-1$.

V drugem primeru v splošni rešitvi $y=-\frac{1}{3}\ln(3(C+e^{-x}))$ upoštevamo pogoj $y(0)=-1$ in dobimo $C=\frac{1}{3}e^3-1$. Torej je $y=-\frac{1}{3}\ln(e^3-3+3e^{-x})$.



Slika : Polje smeri diferencialne enačbe $y' = e^{-x+3y}$ in rešitvi $y = -\frac{1}{3}\ln(3e^{-x} - 2)$, $y(0) = 0$; $y = -\frac{1}{3}\ln(e^3 - 3 + 3e^{-x})$, $y(0) = -1$.

Opomba. Iz polja smeri diferencialne enačbe domnevamo, da ima diferencialna enačba še neko drugačno rešitev. Recimo, da je $y(0) = y_0$. Če ta pogoj upoštevamo v enačbi $y = -\frac{1}{3}\ln(3(C + e^{-x}))$, dobimo $C = \frac{1}{3}e^{-3y_0} - 1$, kar nam da

$$y = -\frac{1}{3}\ln(e^{-3y_0} - 3 + 3e^{-x}).$$

Od vrednosti izraza $e^{-3y_0} - 3$ je torej odvisno, ali bo dobljena rešitev definirana za vse x. Meja je v primeru $e^{-3y_0} - 3 = 0$ in pri tako izbranem $y_0 = -\frac{1}{3}\ln 3$ dobimo rešitev

$$y = -\frac{1}{3}\ln(3e^{-x}) = -\frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{3}x.$$

Zgled

Poišči splošno rešitev enačbe $y' \cos x - y = 0$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

Radioaktivni razpad

Zakon o radioaktivnem razpadu pravi, da je količina radioaktivne snovi, ki razpade v časovni enoti, sorazmerna količini snovi, ki je še na voljo. Torej je

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

kjer je $k < 0$ konstanta, značilna za določen radioaktiven izotop. Diferencialno enačbo zapišemo v obliki $\frac{dm}{m} = k\,dt$, od koder sledi $\ln m = kt + c$, kar nam da $m(t) = Ce^{kt}$ za $C = e^c$. Ker na začetku (tj. pri $t = 0$) velja $m(0) = m_0$, sledi $Ce^{kt}|_{t=0} = m_0$, kar nam da $C = m_0$. Torej je

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

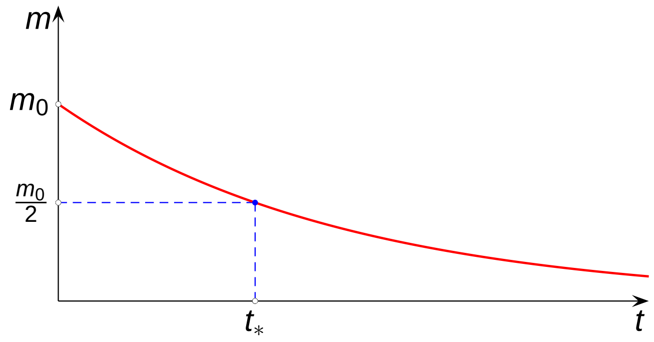
Razpolovni čas

Razpolovni čas je čas t_*, pri katerem je

$$m(t_*) = \frac{1}{2}m_0.$$

Sledi $m_0 e^{kt_*} = \frac{1}{2}m_0$ in $kt_* = \ln\frac{1}{2}$, kar nam da

$$t_* = -\frac{\ln 2}{k}.$$



Ne glede na začetno vrednost m_0 zaradi $k < 0$ velja

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \lim_{t\to\infty} m_0 e^{kt} = 0.$$

Čeprav sčasoma vsi radioaktivni elementi razpadejo, so v mnogih primerih razpolovni časi tako veliki, da predstavljajo trajno nevarnost radioaktivnega sevanja (npr. za ^{232}Th je razpolovni čas 14 milijard let).

Zgled

Na začetku imamo 1 g nekega radioaktivnega izotopa ^{226}Ra. Zapiši, kako se masa iztopa spreminja v odvisnosti od časa. V koliko časa se količina radioaktivnega izotopa razpolovi?

Radiometrično datiranje z ogljikovimi izotopi

Živi organizmi imajo enako razmerje ^{14}C (nestabilni izotop!) in ^{14}N kot atmosfera v tistem času. (Razmerje se skozi zgodovino ni bistveno spreminjalo.) Ko organizem odmre, ^{14}C začne razpadati v ^{14}N. Z merjenjem količine ^{14}C lahko določimo, koliko časa je preteklo od smrti organizma. Če torej poznamo razmerje $\frac{m(t)}{m_0}$ in razpolovni čas t_*, lahko t izračunamo. Enačbo $\frac{m(t)}{m_0} = e^{kt}$ logaritmiramo in izpeljemo

$$t = \frac{1}{k}\ln\frac{m(t)}{m_0} = -\frac{t_*}{\ln 2}\ln\frac{m(t)}{m_0}.$$

Zaradi kratke razpolovne dobe ^{14}C ($5\,730 \pm 40$ let), je metoda primerna samo za določanje starosti do $70\,000$ let.

Zgled

Arhelogi so na Ljubljanskem barju v blatu našli kos drevaka, v katerem je le še 60 % izotopa ^{14}C glede na običajen delež tega izotopa v živem lesu. Koliko je približna starost te najdbe?

Naravna rast

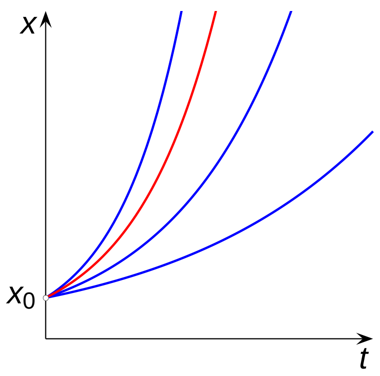
Zakon naravne rasti pravi, da je hitrost spreminjanja količine sorazmerna s količino samo. Torej

$$dx = kx\,dt.$$

Če ne bi bilo bioloških ali fizikalnih omejitev, bi na tak način rastli mnogi organizmi (prirast lesa, razmnoževanje zajcev, ...). Kot smo že videli, ima gornja enačba rešitev

$$x(t) = x_0 e^{kt},$$

kjer je $x_0 = x(0)$ začetna količina.



Ne glede na začetno vrednost x_0 zaradi $k > 0$ velja

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_0 e^{kt} = \infty.$$

Zakon naravne rasti zato v daljšem časovnem obdobju **ne ustreza nobenemu** organizmu ali neki količini v naravi.

Zgled

Količina lesa v deblu se je v dveh letih povečala za 15 %. Za koliko bi se (v idealnem primeru) povečala v t letih?

Newtonov zakon ohlajanja oz. segrevanja

Newtonov zakon pravi, da se telo ohlaja oz. segreva tako, da je hitrost spreminjanja temperature sorazmerna razliki temperature med telesom in okolico. Torej

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_*),$$

ker smo s $T = T(t)$ označili temperaturo ob času t, s T_* pa temperaturo okolice, $k < 0$ pa konstanta, odvisna od snovi.

Enačba $\frac{dT}{T-T_*} = k\,dt$ ima ločljivi spremenljivki, kar nam da $\ln(T - T_*) = kt + c$ in

$$T(t) = T_* + Ce^{kt}.$$

Če ima telo na začetku temperaturo $T_0 = T(0)$, velja $T_0 = T_* + C$, od koder izpeljemo $C = T_0 - T_*$. Sledi

$$T(t) = T_* + (T_0 - T_*)e^{kt}.$$

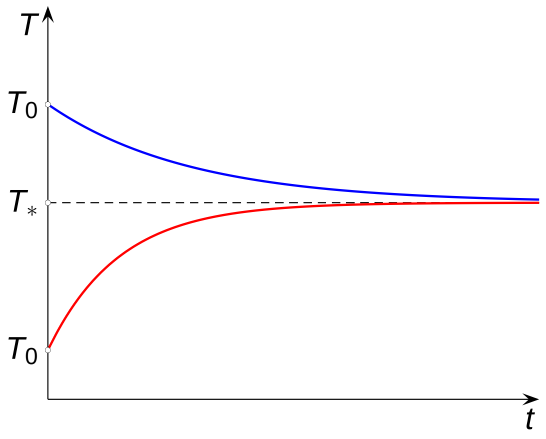
Vrednost konstante k določimo tako, da izmerimo temperaturo telesa pri določenem času, tj. $T_1 = T(t_1)$. Seveda mora biti T_1 med T_0 in T_*. Skratka:

$$T_1 = T_* + (T_0 - T_*)e^{kt_1},$$

kar nam da

$$k = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_*}{T_0 - T_*}.$$

(Ker je T_1 med T_0 in T_*, je $0 < \frac{T_1 - T_*}{T_0 - T_*} < 1$ in res $k < 0$.)



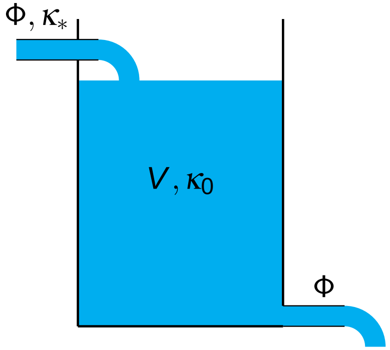
Ne glede na začetno temperaturo T_0 je limitna temperatura enaka T_*. Ker je $T'(t) = k(T(t) - T_*)$, $k < 0$, je pri začetnem $T_0 < T_*$ funkcija naraščajoča, sicer pa padajoča.

Zgled

Plastenka soka se je v vročem avtomobilu segrela na 35° C. Janez jo je pod tekočo vodo, ki ima 15° C, v 1 minuti ohladil za 3° C. V koliko časa se bo pod tekočo vodo sok ohladil na 20° C?

Problem mešanja raztopin

V posodi imamo V litrov raztopine soli s koncentracijo κ_0. V posodo priteka s konstantim pritokom Φ tekočina s koncentracijo κ_* in iz nje enako hitro odteka mešanica. Določimo, kako se s časom spreminja koncentracija raztopine.



Označimo z $m = m(t)$ količino soli v posodi ob času t. Potem je

$$\frac{dm}{dt} = \kappa_*\Phi - \frac{m}{V}\Phi.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{dm}{\kappa_* V - m} = \frac{\Phi}{V}\,dt,$$

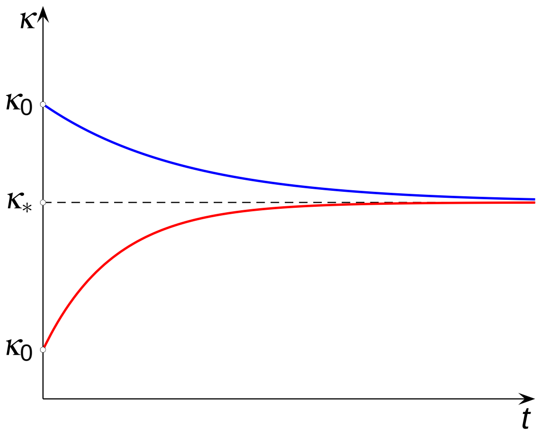
ki ima rešitev $-\ln(\kappa_* V - m) = \frac{\Phi}{V}t + c$, oziroma

$$m(t) = \kappa_* V + Ce^{-\frac{\Phi}{V}t}.$$

Ob času $t = 0$ imamo $m(0) = V\kappa_0$, kar nam da $C = (\kappa_0 - \kappa_*)V$. Sledi

$$\begin{aligned} m(t) &= (\kappa_* + (\kappa_0 - \kappa_*)e^{-\frac{\Phi}{V}t})V, \\ \kappa(t) &= \frac{m(t)}{V} = \kappa_* + (\kappa_0 - \kappa_*)e^{-\frac{\Phi}{V}t}. \end{aligned}$$

Opaziti velja, da je po pričakovanju $\lim_{t\to\infty} \kappa(t) = \kappa_*$, saj se sčasoma prvotna koncentracija izgubi.



Ne glede na začetno koncentracijo κ_0 je limitna koncentracija enaka κ_*. Hitrost približevanja je odvisna predvsem od razmerja $\frac{\Phi}{V}$.

Zgled

V 100 litrsko posodo, v kateri je 2 % raztopina soli, s hitrostjo 5 ℓ na minuto priteka tekočina s 5 % koncentracijo soli. Čez koliko časa bo koncentracija soli v posodi enaka 4 %.

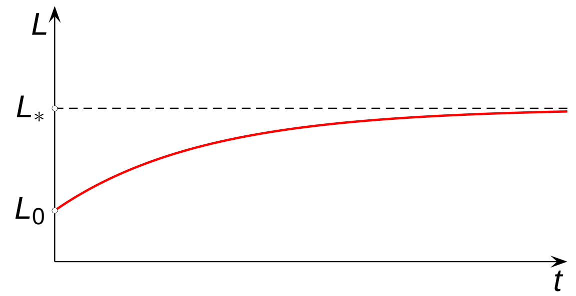
Bartalanffyev model rasti

Označimo z $L(t)$ velikost organizma (npr. dolžino ribe) v času t. Največja možna velikost organizma naj bo L_*. Začetna velikost organizma naj bo L_0. *Bartalanffyev model* pravi, da je prirast sorazmeren razliki med trenutno velikostjo in največjo možno velikostjo. Torej

$$dL = k(L_* - L)\,dt,$$

kjer je $k > 0$ konstanta.
Ta enačba z ločljivima spremenljivkama ima splošno rešitev $L(t) = L_* + Ce^{-kt}$, kar nam ob upoštevanju začetnega pogoja $L(0) = L_0$ da

$$L(t) = L_* + (L_0 - L_*)e^{-kt}.$$



Ne glede na začetno velikost L_0 je limitna velikost enaka

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = \lim_{t\to\infty}\left(L_* + (L_0 - L_*)e^{-kt}\right) = L_*,$$

saj je $k > 0$.

Zgled

Neka vrsta ribe doseže maksimalno dolžino 120 cm, po 20 mesecih pa doseže polovico svoje maksimalne dolžine. Na začetku opazovanja je riba velika 1 cm. Koliko je riba velika po enem letu?

Verhulstov model rasti

Model naravne rasti ne ustreza stanju v naravi, saj ni omejen. Namesto enačbe $\frac{dx}{dt} = kx$, kjer je k konstanta, zapišemo raje

$$\frac{dx}{dt} = k(x)x,$$

kjer je k padajoča funkcija.
Verhulstov model rasti pravi, da je rast populacije sorazmerna številu osebkov v populaciji in razpoložljivim virom (ki omejuje rast). Če z $r > 0$ označimo koeficient rasti in $K > 0$ kapaciteto oz. maksimalno število osebkov v populaciji, velja

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \frac{x}{K})x.$$

Kot običajno označimo z $x_0 = x(0)$ začetno stanje populacije. (Verhulstov model rasti imenujemo tudi *logistični model rasti*.)

Diferencialna enačba $\frac{dx}{dt} = r(1-\frac{x}{K})x$ ima ločljive spremenljivke in jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{dx}{(1-\frac{x}{K})x} = r\,dt.$$

Integral $\int \frac{dx}{(1-\frac{x}{K})x}$ izračunamo tako, da izraz $\frac{1}{(1-\frac{x}{K})x}$ razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{(1-\frac{x}{K})x} = \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{x}{K}} + \frac{1}{x},$$

od koder sledi

$$\int \frac{dx}{(1-\frac{x}{K})x} = -\ln(1-\frac{x}{K}) + \ln x = \ln \frac{x}{1-\frac{x}{K}}.$$

Splošna rešitev gornje diferencialne enačbe je $\ln \frac{x}{1-\frac{x}{K}} = rt + c$ oz.

$$\frac{x}{1-\frac{x}{K}} = Ce^{rt}. \qquad (7)$$

Iz enačbe (7) lahko izrazimo $x = (1-\frac{x}{K})Ce^{rt} = Ce^{rt} - \frac{x}{K}Ce^{rt}$ in od tod $x(1+\frac{1}{K}Ce^{rt}) = Ce^{rt}$. Sledi

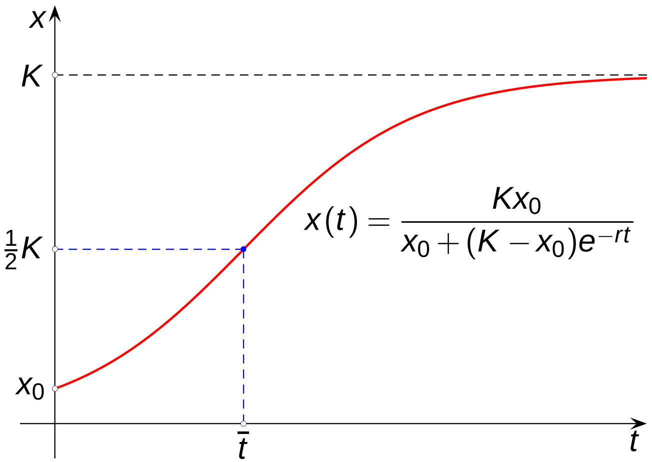
$$x = \frac{Ce^{rt}}{1+\frac{1}{K}Ce^{rt}} = \frac{1}{\frac{1}{K}+\frac{1}{C}e^{-rt}}.$$

Ker je $x(0) = x_0$, iz enačbe (7) sledi $C = \frac{x_0}{1-\frac{x_0}{K}}$. Torej je

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{1-\frac{x_0}{K}}{x_0}e^{-rt}} = \frac{Kx_0}{x_0 + (K-x_0)e^{-rt}}.$$

Iz te enačbe razberemo, da je res

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K.$$



Če je $x_0 < \frac{1}{2}K$, je polovična kapaciteta dosežena ob času $\bar{t} = \frac{1}{r}\ln\frac{K-x_0}{x_0}$.

Ker je

$$\begin{aligned} x''(t) &= \left(r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)x(t)\right)' = \\ &= -\frac{r}{K}x'(t)x(t) + r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)x'(t) = \\ &= r\left(1-2\frac{x(t)}{K}\right)x'(t) \end{aligned}$$

in $x'(t) > 0$ za vsak t, je $x''(t) = 0$ le pri $x(t) = \frac{K}{2}$. Torej ima *logistična krivulja* prevoj ravno v točki, kjer je dosežena polovična kapaciteta.
Graf je konveksen za $t < \bar{t}$ in konkaven za $t > \bar{t}$.

Zgled

Ob rojstvu je konj visok 51 cm in lahko doseže maksimalno višino 148 cm. V kateri starosti je njegova rast najhitrejša, če doseže 95 % svoje višine v dveh letih?