

Izpit iz Analize I

10. februar 2000

1. Označimo $f(x) = \sqrt{\frac{(x+3)^3}{x-1}}$.

(a) Zapiši enačbi asimptot funkcije f za $x \rightarrow \infty$ in $x \rightarrow -\infty$.

(b) Katera točka na grafu funkcije f je najbližja koordinatnemu izhodišču?

2. Zaporedje je podano s predpisom $a_0 = 6$ in $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ za $n \geq 0$.

(a) Dokaži, da zaporedje (a_n) konvergira k 3.

(b) Ali je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} (3 - a_n)$ konvergentna?

Namig. Uporabi kvocientni kriterij.

3. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} 4x + y + 2z &= -2 \\ -x - 4z + w &= a \\ 5x + y + 6z - w &= -7 \\ 3x + y - 2z + w &= 3 \end{aligned}$$

4. Vektorski prostor zveznih funkcij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ustrezajo pogoju

$$f(x + \pi) = f(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R},$$

opremimo s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Naj bo V podprostor tega prostora, napet na funkciji \sin in \cos .

(a) Zapiši kakšno ortonormirano bazo prostora V .

- (b) Izberimo poljuben $\alpha \in [0, 2\pi]$ in definirajmo preslikavo $A: V \rightarrow V$ s predpisom $(Af)(x) = f(x + \alpha)$. Izra"unaj adjungirani operator A^* in doka"zi, da je A ortogonalna transformacija.
- (c) Doka"zi, da je A vrte"z za kot α .

To"ckovanje: $(12 + 13) + (15 + 10) + 20 + (10 + 15 + 5) = 100$.

Teoreti"ni del izpita bo 17. 2. 2000 ob 15^h v predavalnici M2.