FMF-fizika

2. kolokvij iz Analize I

18. januar 2000

1. Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisna vektorja. Operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj bo podan s predpisom $A\vec{x} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x})$.
   (a) Poi”s”ci lastne vrednosti in lastne vektorje operatorja A.
   (b) Dolo”ci karakteristi”cni polinom operatorja A.
   (c) Ali je operator A diagonalizabilen?

2. Prostor polinomov $V = \mathbb{R}_2[x]$ opremimo s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(-1)\, q(-1) + 2\, p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1).$$

   (a) Doka”zi, da gornji predpis res dolo”ca skalarni produkt.
   (b) Zapi”si ortonormirano bazo prostora V, ki jo dobi”s po Gram-Schmidtovem postopku na bazi $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$. **Ra”cunaj pazljivo!**
   (c) Kateri od polinomov iz podprostora $W = \{p \in V;\ p(0) = 0\}$ je najbli”zji polinomu 1 in koliko sta oddaljena?
   (d) S predpisom $F(p) = p(1)$ je podan linearni funkcional $F\colon V \to \mathbb{R}$. Dolo”ci tak polinom $q \in V$, da bo $F(p) = \langle p, q \rangle$ za vsak $p \in V$.
   (e) Zapi”si matriko v bazi $\mathcal{B}$, ki pripada adjungiranemu operatorju k operatorju T, podanim s predpisom

$$Tp(x) = p(x) + x\, p'(x).$$

To”ckovanje: $(15 + 10 + 10) + (10 + 10 + 15 + 15 + 15) = 100$.