Izpit iz Analize I

15. junij 2001

1. Določi tako vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$, da bo obstajala končna limita
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \sqrt[6]{1 + ax^2}}{x^4}.$$
Pri tako določeni vrednosti parametra a limito tudi izračunaj.
Nasvet. Razvoj v Taylorjevo vrsto.

2. Naj bosta vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ pravokotna in neničelna. Označimo
$$A\vec{x} = ((\vec{p} \times \vec{q})\vec{x})\vec{q} + \|\vec{q}\|^2(\vec{p} \times \vec{x}).$$
Določi jedro in zalogo vrednosti operatorja A.

3. Katera izmed kvadratnih parabol z enačbo $y = ax^2 + bx$, $a < 0$, ki se dotika hipotenuze trikotnika z oglišči v točkah $A(0,0)$, $B(0,1)$ in $C(1,0)$, oklepa z abscisno osjo lik maksimalne ploščine?
Nasvet. Najprej določi zvezo med a in b, da bo premica BC tangenta te parabole?

4. Naj bo $C(\mathbb{R})$ vektorski prostor zveznih funkcij z operacijama $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ in $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda\, f(x)$. Naj bo V vektorski podprostor, napet na funkcije 1, sin in cos, kjer 1 označuje konstantno funkcijo $1\colon x \mapsto 1$. Prostor opremimo s skalarnim produktom
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt.$$
Dokaži, da je $F(f) = \int_0^{\pi/2} f(t)\, dt$ linearni funkcional na prostoru V in določi bazo za ortogonalni komplement jedra funkcionala F.

3. **[Pedagogi]** Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x^2+2)}\,; & x \geq 1 \\ ax^2 + b\,; & x < 1 \end{cases}$$
povsod zvezna in odvedljiva. Ali je tako definirana funkcija zvezno odvedljiva?

4. **[Pedagogi]** Operator $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ naj bo podan s predpisom
$$A(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2, a_1, a_4, a_3).$$
Poišči lastne vrednosti operatorja A in opiši lastne podprostore.