Izpit iz Analize I

14. september 2001

1. Naj bo $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{če je } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{če je } x > 0 \end{cases}$.
   Poišči pravokotnik maksimalne ploščine, ki ga lahko včrtamo v lik, ki ga omejujeta graf funkcije f in abscisna os. Ena stranica pravokotnika mora ležati na abscisni osi.

2. Vektorski prostor $V = \mathbb{R}_2[x]$ realnih polinomov stopnje kvečjemu 2 opremimo s takim skalarnim produktom, da je množica $\{1, x-1, 1-x^2\}$ ortonormirana baza.
   (a) Poišči kot med vektorjema x in x^2.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada v gornji bazi adjungiranemu operatorju D^* k operatorju odvajanja $D\colon p(x) \mapsto p'(x)$.

3. Določi konvergenčno območje in **vsoto** potenčne vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}(x+3)^n.$$

4. Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 1$, vektorski prostor realnih polinomov.
   (a) Dokaži, da je za vsak $a > 0$ s predpisom
$$F_a(f) = \int_0^1 x^a\, f(x)\, dx$$
   definiran linearni funkcional F_a na prostoru $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Dokaži, da sta funkcionala F_a in F_b linearno neodvisna natanko tedaj, ko je $a \neq b$.

3. [**Pedagogi**] Določi konvergenčno območje vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+2)^n 4^{-n/2}$$

in razišči konvergenco na robu konvergenčnega območja.

4. [**Pedagogi**] Poišči s pomočjo vezanega ekstrema razdaljo od koordinatnega izhodišča do ploskve z enačbo $x^2 + y + z = \frac{1}{2}$.