3. kolokvij iz Analize I

13. april 2001

1. Zapiši enačbo tiste ravnine skozi točki $A(1,0,0)$ in $B(2,1,-1)$, ki je pravokotna na ravnino z enačbo $2x+y-z=-1$.

2. Naj bo $\mathbb{R}_2[x]$ vektorski prostor polinomov stopnje največ 2 z realnimi koeficienti in
$$U = \{p \in \mathbb{R}_2[x];\ 2\,p(0) = p'(1)\}.$$
Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ je opremljen s skalarnim produktom $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.
   (a) Poišči tako ortogonalno bazo $\mathcal{B}_U$ podprostora U, ki vsebuje polinom $p(x) = x^2+1$.
   (b) Izračunaj razdaljo med polinomom x^2 in prostorom U.

3. Naj bo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Označimo
$$A(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Dokaži, da je preslikava $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, določena z $f(x) = \det A(x)$, linearni funkcional.
   (b) Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^4$. Zapiši dualno bazo k $\mathcal{B}$ in razvij funkcional $f \in V'$ po tej bazi.

4. Kvadratna matrika T je *nilpotentna*, če je $T^n = 0$ za kakšen $n \in \mathbb{N}$. Naj bosta A in B nilpotentni matriki iste dimenzije, ki komutirata. Dokaži, da sta potem tudi matriki $A+B$ in

AB nilpotentni. Kje v dokazu potrebujemo komutativnost? (Nasvet za $A+B$: če je $A^m = 0$ in $B^n = 0$, pokaži, da je $(A+B)^{m+n} = 0$.)

Točkovanje: $25 + (10 + 15) + (15 + 10) + 25 = 100$.