Izpit iz Analize I

13. junij 2002

1. Izračunaj dolžino krivulje

$$x(t) = \int_1^t \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau, \qquad y(t) = \int_1^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$$

od koordinatnega izhodišča do najbližje točke z navpično tangento.

2. (a) Določi območje zveznosti funkcije $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

   (b) Pokaži, da je funkcija

$$g(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x\,\ln(1-x)$$

   na intervalu $(0,1)$ konstantna, in določi to konstanto, če veš, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Nasvet. Izračunaj $\lim_{x\to 0} \ln x\,\ln(1-x)$ in dokaži, da lahko g zvezno razširimo na interval $[0,1]$.

   (c) Izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n^2}$.

3. Poišči ravnino, ki je vzporedna ravnini z enačbo $x + y = 0$ in seka premici z enačbama

$$\frac{x}{3} = y + 1 = \frac{3-z}{2} \quad \text{in} \quad x = 1,\; y = z + 2$$

v točkah, ki sta oddaljeni 3 enote. Poišči vse rešitve.

4. Operator $A\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ naj bo podan s predpisom

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}) = (a_2, a_1, a_4, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n-1}).$$

(a) Poišči lastne vrednosti operatorja A in opiši lastne podprostore.

(b) Zapiši matriko operatorja A v standardni bazi, jo diagonaliziraj in poišči prehodno matriko.