Izpit iz Analize I

27. junij 2002

1. Izračunaj limito
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1} - \frac{\pi}{4} \right) dx.$$
Namig. L'Hospitalovo pravilo.

2. Zaporedje je podano s predpisom $a_0 = 18$ in $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ za $n \geq 0$.
   (a) Dokaži, da zaporedje (a_n) konvergira k 4.
   (b) Ali je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(4 - a_n)$ konvergentna?
   Namig. Uporabi kvocientni kriterij.

3. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Poišči vse rešitve sistema enačb
$$\begin{array}{rrrrrr} 4x & +y & +2z & & = & -2 \\ -x & & -4z & +w & = & a \\ 5x & +y & +6z & -w & = & -7 \\ 3x & +y & -2z & +w & = & 3 \end{array}$$

4. Vektorski prostor zveznih funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ustrezajo pogoju
$$f(x+\pi) = -f(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R},$$
opremimo s skalarnim produktom
$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x)\, dx.$$
Naj bo V podprostor tega prostora, napet na funkciji sin in cos.
   (a) Zapiši kakšno ortonormirano bazo prostora V.

(b) Izberimo poljuben $\alpha \in [0, 2\pi]$ in definirajmo preslikavo $A\colon V \to V$ s predpisom $(Af)(x) = f(x + \alpha)$. Izračunaj adjungirani operator A^* in dokaži, da je A ortogonalna transformacija.

Točkovanje: $25 + (15 + 10) + 25 + (10 + 15) = 100$.