Izpit iz Analize I

4. september 2002

1. Določi konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

in razišči konvergenco na robu konvergenčnega območja.

2. Označimo $f(x) = \operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1+x^2}$.

(a) Poišči prvi neničelni člen v razvoju funkcije f v Taylorjevo vrsto okrog točke 0.

(b) Določi največje naravno število n, da bo obstajala limita

$$\lim_{x\to\infty} x^n f(\tfrac{1}{x})$$

in to limito tudi izračunaj.

2.* Oblikovati želimo posodo (prez pokrova) v obliki valja. Kakšno naj bo razmerje med višino valja in premerom osnovne ploskve, da bo imela posoda pri dani površini plašča največjo prostornino?

3. Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor realnih polinomov stopnje največ n. Operator $A\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ naj bo podan s predpisom $A(p)(x) = x\,p'(x) + p(-1)$.

(a) Zapiši matriko, ki pripada operatorju A^{-1} v bazi $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

(b) Poišči lastne vrednosti operatorja A in opiši lastne podprostore.

4. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, katere elementi t_{ij} so določeni s predpisom

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{če je } i = j, \\ a, & \text{če je } i = 1 \text{ in } j > 1, \\ b, & \text{če je } j = 1 \text{ in } i > 1, \\ c, & \text{sicer.} \end{cases}$$

4.* Kolikšen je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje

$$2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} - 2\vec{b} \text{ in } \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c},$$

če je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, enak 1?

Študenti pedagoške smeri naj rešujejo nalogi 2* in 4* namesto nalog 2 in 4.