FMF-fizika

Izpit iz Analize I

18. september 2002

1. Kolikšna je prostornina vrtenine, ki jo določa graf funkcije
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+8}$$
na intervalu $(-2, 0]$, pri vrtenju okoli svoje navpične asimptote?

2. Naj bo (a_n) zaporedje realnih števil. Dokaži, da je
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
natanko tedaj, ko je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n}{a_n+1} = 0.$$

2.* Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom $a_n = (\sqrt{n^2+1} - n)\operatorname{ctg}\frac{1}{n}$.

3. (a) Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ vektorski podprostor matrik z običajnimi matričnimi operacijami. Dokaži, da je množica vseh matrik $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katere je $AX = XA$ za vsak $A \in \mathcal{A}$, vektorski prostor.

   (b) Poišči vse take matrike X v primeru
$$\mathcal{A} = \{A;\ A = [a_{ij}] \text{ in } a_{ij} = 0 \text{ za } i \geq 2 \text{ ali } j = 1\}.$$

4. Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 1$, vektorski prostor realnih polinomov.

   (a) Dokaži, da je za vsak $a \in \mathbb{R}$ s predpisom $F_a(f) = f'(a) + f(a)$ definiran linearni funkcional F_a na prostoru $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Dokaži, da sta funkcionala F_a in F_b linearno neodvisna natanko tedaj, ko je $a \neq b$.

4.* Naj bo V vektorski prostor polinomov stopnje največ 4 z realnimi koeficienti.

   (a) Dokaži, da je preslikava $A\colon V \to \mathbb{R}^3$, podana s predpisom
$$Ap = (p'(1) - p(1), p'(-1) + p(-1), p(0)),$$
   linearna.

   (b) Poišči kakšno bazo za $\operatorname{Ker} A$.

Študenti pedagoške smeri naj rešujejo nalogi 2* in 4* namesto nalog 2 in 4.