1. kolokvij iz Analize I

30. november 2001

1. Poišči vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo enačbi
$$z^2 + 2i\,\mathrm{Re}(z) = |z|.$$

2. Izračunaj vrednost determinante matrike $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$, če je
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{če je } i = j, \text{ in} \\ 1, & \text{če je } i \neq j. \end{cases}$$

3. Zapiši enačbo projekcije premice $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ na ravnino $x + 2y + z = 0$ vzdolž premice $x = 2y = z$.

4. (a) Dokaži, da je množica G vseh matrik oblike $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\delta \in \{-1, 1\}$, grupa za običajno množenje matrik.

   (b) Naj bo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multiplikativna grupa realnih števil. Dokaži, da je preslikava $f\colon G \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = \det(A)$, homomorfizem in določi njegovo jedro in sliko.

Točkovanje: $25 + 25 + 25 + (10 + 15) = 100$.

1. kolokvij iz Analize I – rešitev

30. november 2001

1. Poišči vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo enačbi
$$z^2 + 2i\,\mathrm{Re}(z) = |z|.$$
Rešitev. Pišimo $z = x + iy$. Tedaj je $x^2 - y^2 + 2ix(y+1) = \sqrt{x^2+y^2}$. Sledi $x(y+1) = 0$ in $x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Pri $x = 0$ mora biti $y = 0$. Pri $x \neq 0$ pa je $y = -1$ in $x^2 - 1 = \sqrt{x^2+1}$, kar nam da še $x = \pm\sqrt{3}$. Torej je $z \in \{0, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i\}$.

2. Izračunaj vrednost determinante matrike $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$, če je
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{če je } i = j, \text{ in} \\ 1, & \text{če je } i \neq j. \end{cases}$$
Rešitev. Vse vrstice prištejemo prvi, iz te vrstice izpostavimo $n - 1$, nato pa (novo) prvo vrstico od vseh ostalih odštejemo. Dobimo $\det(A) = (n-1)(-1)^{n-1}$.

3. Zapiši enačbo projekcije premice $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ na ravnino $x + 2y + z = 0$ vzdolž premice $x = 2y = z$.
Rešitev – 1. način. Obe premici in ravnina vsebujejo točko $O(0,0,0)$. Pri projekciji moramo zato poskrbeti le za pravi smerni vektor. Pri projeciranju premice z enačbo $\vec{r} = t\vec{a}$ vzdolž $\vec{r} = t\vec{b}$ na ravnino $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ dobimo premico z enačbo $\vec{r} = t\vec{s}$. Velja $\vec{s} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \perp \vec{n}$, od koder dobimo $\lambda = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{b}\cdot\vec{n}}$. Torej je $\vec{s} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\vec{b}$. V našem primeru imamo $\vec{a} = (2,3,1)$, $\vec{b} = (2,1,2)$, $\vec{n} = (1,2,1)$ in $\vec{s} = (-1, \frac{3}{2}, -2) \equiv (2,-3,4)$.
2. način. Iskana premica $\vec{r} = t\vec{s}$ je presek dane ravnine $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ in ravnine, napete na premici $\vec{r} = t\vec{a}$ in $\vec{r} = t\vec{b}$. Normala ravnine, ki jo obe premici določata, je $\vec{a} \times \vec{b}$, zato je $\vec{s} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{n}$. V našem primeru imamo $\vec{s} = (6,-9,12) \equiv (2,-3,4)$.

4. (a) Dokaži, da je množica G vseh matrik oblike $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\delta \in \{-1, 1\}$, grupa za običajno množenje matrik.
   (b) Naj bo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multiplikativna grupa realnih števil. Dokaži, da je preslikava $f\colon G \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = \det(A)$, homomorfizem in določi njegovo jedro in sliko.

Rešitev. Bodi $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$. Da je G grupa, sledi iz $AB = \begin{bmatrix} 1 & \beta + \alpha\gamma \\ 0 & \delta\gamma \end{bmatrix} \in G$ ter $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\delta} \\ 0 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix} \in G$. Ker je $\det(A) = \delta$, gornji račun tudi pokaže, da je $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$; torej je det homomorfizem. Velja še $\mathrm{Im}(f) = \{-1, 1\}$ in $\mathrm{Ker}(f) = \{A;\ \det(A) = 1\} = \{\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.