2. kolokvij iz Analize I

6. februar 2002

1. Naj prostoru polinomov $\mathbb{R}_n[x]$ je podan linearni operator A s predpisom
$$(Ap)(x) = \int_0^x (p(t+1) - p(t))\, dt.$$
Dokaži, da pripada operatorju A v bazi $\{1, x, \ldots, x^n\}$ zgornje trikotna matrika in določi njene diagonalne elemente.

2. Dana je linearna preslikava $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$$Ax = \langle x, a\rangle b + x,$$
kjer sta $a, b \in \mathbb{R}^n$ fiksna neničelna vektorja. (Z $\langle\,,\,\rangle$ smo označili standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.)
   (a) Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave A.
   (b) Kateremu pogoju morata zadoščati vektorja a in b, da matrika $\mathcal{A}$, ki pripada preslikavi A, ne bo diagonalizabilna?

3. V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je podan skalarni produkt
$$\langle p, q\rangle = 2p(0)q(0)+p(0)q(1)+p(1)q(0)+p(1)q(1)+p(-1)q(-1).$$
   (a) Dokaži, da je to res skalarni produkt.
   (b) Določi pravokotno projekcijo vektorja x^2 na ravnino, ki jo napenjata vektorja 1 in x.
   (c) Dokaži, da je s predpisom $f(p) = p(1)$ podan linearni funkcional $f\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$.
   (d) Določi tak polinom $q \in \mathbb{R}_2[x]$, da bo $f(p) = \langle p, q\rangle$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Nasvet. Pri (b) je koristno poznati primerno ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$. To bazo lahko kasneje uporabimo tudi pri (d).

Točkovanje: $20 + (20 + 10) + (10 + 20 + 5 + 15) = 100$.

1. kolokvij iz Analize I – rešitev

30. november 2001

1. ...