1. kolokvij iz Analize I

7. december 2002

1. Določi vsa kompleksna števila z, za katera velja $|z+1| = |z|$ in $z = i\bar{z}$.

2. Naj bo $p > 0$. Razišči konvergernco vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(p + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$
Nasvet. Korenski kriterij.

3. Za katere vrednosti parametra a je možno funkcijo f, podano s predpisom
$$f(x) = \frac{2e^{\frac{1}{2x}} + a}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{\frac{1}{x}}}},$$
zvezno razširiti na celoten $\mathbb{R}$?

4. Dokaži, da za zaporedje a_n s pozitivnimi členi velja: Če je zaporedje a_n konvergentno, je konvergentno tudi zaporedje $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ in velja
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$
Nasvet. Označi $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Za vsak $\varepsilon > 0$ ležijo vsi dovolj pozni členi tega zaporedja na intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in lahko izraz $a_1 a_2 \ldots a_n$ primerno omejiš. (Pri $a = 0$ pravilno zapiši spodnjo mejo pri tej oceni.)