

Izpit iz Analize I

23. januar 2004

1. Označimo

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin s}{\sqrt{1+s+s^2}} ds \quad \text{in} \quad y(t) = \int_1^t \frac{\cos s}{\sqrt{1+s+s^2}} ds .$$

Izračunaj dolžino loka krivulje $(x(t), y(t))$, ko preteče parameter t interval $[1, t_0]$ in je t_0 tista vrednost parametra t , ko je tangenta prvič vzporedna z osjo x .

2. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Definirajmo linearno preslikavo $T: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ s predpisom $T(X) = AXA^{-1}$.

(a) Zapiši matriko preslikave T v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^{2,2}$ (tj. bazi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(b) Določi vse lastne vrednosti preslikave T .

(c) Poišči vse matrike X , za katere je $\text{sled}(T(X)) = 0$.

3. Naj bo $r > 0$. Parabola $y^2 = 2px$ seka krožnico $x^2 + y^2 = 2rx$ v točkah $O(0,0)$, A in B .

(a) Določi vrednost parametra p , da bo ploščina lika, omejenega s parabolo in daljico AB , maksimalna.

(b) Pri vrednosti parametra $p = r/3$ izračunaj površino vrtenine, ki jo določa lok parabole znotraj kroga, pri vrtenju okrog abscisne osi.

4. Opreмимо prostor \mathbb{R}^n z običajnim skalarnim produktom. Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$ vektor (pisan stolpčno) dolžine 1. Poišči vsa realna števila α , za katera je matrika $Q = I - \alpha aa^T$ ortogonalna.

Točkovanje: $25 + (15 + 10) + (10 + 10 + 10) + 20 = 100$.