Izpit iz Analize I

21. junij 2004

1. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{x^2+x-1}{e^x(x+1)^2}\,dx$.

2. Označimo $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Razišči konvergenco vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a_1+1)(a_2+2)\cdots(a_n+n)}.$$

P2 Določi konvergenčno območje vrste $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+6)^n 3^{-2n}$, $x \in \mathbb{R}$, in razišči konvergenco na robu konvergenčnega območja.

3. Kolikšen je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \quad \vec{a}-\vec{b} \text{ in } 2\vec{b}-\vec{c},$$
če je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}$ in $\vec{c}-\vec{a}$, enak 1?

4. Naj bo $C(\mathbb{R})$ vektorski prostor zveznih realnih funkcij z operacijama $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ in $(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\, f(x)$. Naj bo V vektorski podprostor, napet na funkcije 1, sin in cos, kjer 1 označuje konstantno funkcijo $1\colon x \mapsto 1$. Prostor opremimo s skalarnim produktom $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)g(x)\,dx$.
   (a) Dokaži, da je preslikava $A\colon V \to V$, definirana s predpisom
   $$(Af)(x) = f(x+\pi/6) - f(x),$$
   linearna in zapiši matriko, ki pripada tej preslikavi v bazi $\{1, \sin, \cos\}$.
   (b) Poišči jedro $N(A)$ in zalogo vrednosti $R(A)$ preslikave A.
   (c) Dokaži, da je preslikava $F\colon V \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $F(f) = f(\pi)$ linearni funkcional in poišči takšen vektor $r \in V$, da bo $F(f) = \langle f, r\rangle$ za vsak $f \in V$.

P4 Naj bo V množica tistih točk $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, za katere je
$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
Dokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ in določi vsaj eno ortonormirano bazo za V in $V^\perp$.

Nalogi **P**2 in **P**4 nadomeščata nalogi 2 in 4 za študente pedagoške smeri.