Izpit iz Analize I

2. julij 2004

1. Naj bo funkcija $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1-\frac{1}{3}x}{x^2} & ;\ x\neq 0,\\ a & ;\ x=0.\end{cases}$$

   (a) Določi konstanto $a\in\mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana.

   (b) Izračunaj $f'(0)$ pri tako izbrani konstanti a.

2. Zaporedje je podano rekurzivno

$$a_1=10,\qquad a_{n+1}=\frac{4a_n^2-3a_n+2}{2a_n^2+1}.$$

   Pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.

P2 Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}{x^3}.$$

3. Naj bosta $a,b\in\mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$, katere elementi t_{ij} so določeni s predpisom

$$t_{ij}=\begin{cases}a+b, & \text{če je } i=j,\\ a, & \text{sicer.}\end{cases}$$

4. Označimo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

   Eksplicitno izračunaj A^n za poljubno naravno število n.

   NASVET. Matriko najprej diagonaliziraj.

P4 (a) Naj bosta $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ poljubni matriki. Dokaži, da je množica vseh matrik $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, za katere je $AX=XB$, vektorski prostor.

   (b) Poišči vse take matrike X v primeru
   $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ in $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{bmatrix}$.

Nalogi **P**2 in **P**4 nadomeščata nalogi 2 in 4 za študente pedagoške smeri.