Izpit iz Analize I

1. september 2004

1. Izračunaj limito

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int_1^t \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1} - \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

2. Naj bo (a_n) naraščajoče omejeno zaporedje pozitivnih realnih števil. Dokaži, da za poljubno zaporedje (b_n) velja:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -1 \quad \text{natanko tedaj, ko} \quad \lim_{n\to\infty} a_n(b_n+1) = 0.$$

P2 Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-2}{5n+1}$ monotono in omejeno ter izračunaj njegovo limito. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = 10^{-2}$?

3. (a) Dokaži, da je s predpisom $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{3} p(i)q(i)$ podan skalarni produkt v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

   (b) Poišči ortogonalni komplement prostora $V = \{p \in \mathbb{R}_3[x];\ p(1) = p(-1),\ p'(-1) = 0\}$ glede na ta skalarni produkt.

4. V $\mathbb{R}^3$ imamo bazo $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$, katere elemente označimo po vrsti s f_1, f_2, f_3. Za linearno preslikavo $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ velja $Af_1 = -f_2 + f_3$, $Af_2 = -f_1 + f_3$ in $Af_3 = f_3$.

   (a) Določi slike standardnih baznih vektorjev prostora $\mathbb{R}^3$ pri tej preslikavi.

   (b) Zapiši matriko, ki pripada A v bazi $\mathcal{B}$, ter izračunaj njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje.

P4 Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Poišči vse rešitve sistema enačb:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Nalogi **P**2 in **P**4 nadomeščata nalogi 2 in 4 za študente pedagoške smeri.