2. kolokvij iz Analize I

19. januar 2004

1. Naj bo $\mathcal{M}$ vektorski prostor realnih matrik razsežnosti $n \times n$ za običajno seštevanje in množenje s skalarjem. Za vsak $S \in \mathcal{M}$ je s predpisom $f_S(X) = \mathrm{sled}(XS)$ podan linearni funkcional $f_S \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

   Dokaži, da sta vektorja A in B iz $\mathcal{M}$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko sta funkcionala f_A in f_B linearno neodvisna.

2. Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor realnih polinomov stopnje največ n. Operator $H \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ naj bo podan s predpisom

$$H(p)(x) = (x+1)\,p'(x) + p(1).$$

   (a) Poišči lastne vrednosti operatorja H in opiši lastne podprostore.

   (b) Ali je operator H diagonalizabilen?

3. Naj bo $V = \mathbb{R}_2[x]$ vektorski prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje največ 2.

   (a) Dokaži, da predpis

$$\langle p, q\rangle = p(-1)\,q(-1) + 2p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1)$$

   določa skalarni produkt na V.

   (b) Poišči kakšno ortonormirano bazo za V.

   (c) Zapiši matriko, ki pripada adjungiranemu operatorju k operatorju T, podanem s predpisom $(Tp)(x) = p(x+1) - p(x)$, v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

4. Dana je kvadratna forma

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy.$$

   Določi glavne osi ploskve $Q(x,y,z) = 1$.

Točkovanje: $25 + (15+10) + (10+10+10) + 20 = 100$.