

Izpit iz Analize I

25. januar 2005

1. Določi vrednost parametra a tako, da bo vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak + 1}{9k^2 + 3k - 2}$$

konvergentna in izračunaj njeno vsoto.

2. Naj bo $f(x) = \arctan \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$.

- Pod kakšnim kotom se sekata leva in desna tangenta v točki, kjer f zavzame najmanjšo vrednost?
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f in pozitivna poltraka koordinatnih osi.

3. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} 5x + y + 6z - w &= -7 \\ 4x + y + 2z &= -2 \\ -x - 4z + w &= a \\ 3x + y - 2z + w &= 3 \end{aligned}$$

4. Za vektorja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ in $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ definiramo

$$[x, y] = x_1y_1 + \frac{1}{4}x_2y_2 + \frac{1}{9}x_3y_3 + \frac{1}{25}x_4y_4.$$

Označimo $a = (3, -1, 6, 5)$ in $b = (1, 4, 3, -15)$ ter s predpisom

$$Aw = [w, a]b + w$$

definiramo še preslikavo $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

- Dokaži, da je $[\ , \]$ skalarni produkt na \mathbb{R}^4 .
- Določi vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje preslikave A .
- Izračunaj determinanto matrike, ki pripada preslikavi A .
- Naj bo B adjungirani operator k A glede na skalarni produkt $[\ , \]$. Določi Bx za vsak $x \in \mathbb{R}^4$.

NASVET. Z Gram-Schmidtovim postopkom pretvori standardno bazo $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ v ONB glede na skalarni produkt $[\ , \]$.