

Izpit iz Analize I

16. september 2005

1. (a) Določi konstanti a in b , da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{1+x} - \sqrt[4]{1+ax})x^{-2} & x \in [-1/4, 1/4] \setminus \{0\} \\ b & x = 0 \end{cases}$$

zvezna povsod, kjer je definirana.

- (b) Pri tako izbranih a in b dokaži, da je funkcija f odvedljiva v točki 0 in izračunaj $f'(0)$.

2. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3}{n^3 \sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{2^3}{n^3 \sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{n^3}{n^3 \sqrt{n^2 + n^2}} \right).$$

NASVET. V gornji vsoti lahko prepoznaš Riemannovo vsoto za neki določeni integral.

3. Za linearni funkcional $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(1, 1, -1) = 2$, $f(3, -1, -1) = 4$, $f(-5, 1, 3) = 6$. Določi $f(x, y, z)$ za poljuben vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4. Operator $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ naj bo podan s predpisom

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}) = (a_2, a_1, a_4, a_3, \dots, a_{2n}, a_{2n-1}).$$

- (a) Poišči lastne vrednosti operatorja A in opiši lastne podprostore.
 (b) zapiši matriko operatorja A v standardni bazi, jo diagonaliziraj in poišči prehodno matriko.