4. kolokvij iz Analize I

27. maj 2005

1. Poišči in opiši vse lokalne ekstreme funkcije g, podane s predpisom
$$g(x,y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2 + x + y + 1.$$

2. (a) Dokaži, da je s predpisom
$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx$$
podan skalarni produkt na prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[x]$.

   (b) Poišči kakšno ortonormirano bazo prostora
$$W = \{p \in \mathbb{R}_2[x];\ p'(0) = p(0)\}.$$

   (c) Kateri polinom iz prostora W je polinomu $p(x) = x$ najbližji?

   (d) Naj bo linearna preslikava $A\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ podana s predpisom $(Ap)(x) = p(x+1) - p(x)$ in $q(x) = x^2$. Določi $A^*(q)$.

3. Katero ploskev v prostoru določa enačba
$$x^2 - 3y^2 + 4yz = 1\,?$$
Določi smeri njenih glavnih osi in poišči točke na tej ploskvi, ki so od koordinatnega izhodišča najmanj oddaljene.

4. Naj bo V prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $a_1, \ldots, a_n \in V$ poljubni vektorji. Definirajmo $f_i(x) = \langle x, a_i\rangle$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

   Dokaži, da je $[a_1, \ldots, a_n]$ baza prostora V natanko tedaj, ko je $[f_1, \ldots, f_n]$ baza prostora V^*.

Točkovanje: $20 + (10 + 10 + 10 + 10) + 20 + 20 = 100$.