

Izpit iz Analize I

25. januar 2006

1. Kolikšna je prostornina vrtenine, ki jo določa graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x}$$

na intervalu $[2, \infty)$, pri vrtenju okoli svoje vodoravne asimptote?

2. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+x} \ln(1+x)}{x \sin x} \right).$$

3. Naj bo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Označimo

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dokaži, da je preslikava $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, določena z $f(x) = \det A(x)$, linearni funkcional.
- (b) Poišči kakšno ortonormirano bazo za prostor $\text{Ker}(f)$ in jo dopolni do ortonormirane baze prostora \mathbb{R}^4 . Dobljeno bazo označi z \mathcal{O} .
- (c) Naj bo \mathcal{B} standardna baza prostora \mathbb{R}^4 . Zapiši dualno bazo k \mathcal{B} in razvij funkcional $f \in V'$ po tej bazi. Poišči še razvoj funkcionala f po dualni bazi k \mathcal{O} .

4. Dana je kvadratna forma

$$Q(x, y, z) = \frac{1}{3}x^2 + 4xy - \frac{8}{3}xz + \frac{2}{3}y^2 - \frac{4}{3}yz - z^2.$$

- (a) Katero ploskev v \mathbb{R}^3 določa enačba $Q(x, y, z) = 1$?
- (b) Določi smeri glavnih osi gornje ploskve.