Izpit iz Analize I

5. junij 2006

1. Določi največje naravno število n, za katero obstaja limita
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{(1+x)}-\frac{1}{1-x}}{x^n},$$
in pri tem n limito tudi izračunaj.

2. Naj bo $g(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2}$. Izračunaj površino ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije g pri vrtenju okoli abscisne osi.

3. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ je izbran tak skalarni produkt, označimo ga z $[\_,\_]$, da tvorjo vektorji $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ in $(0,1,1)$ ortonormirano bazo.
   (a) Za vektor $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}$ definiramo $f(x)=x_1+2x_2+3x_3$. Dokaži, da je f linearni funkcional.
   (b) Določi ortogonalni komplement jedra linearnega funkcionala f.
   (c) Poišči tak vektor $y\in\mathbb{R}^3$, da je $f(x)=[x,y]$ za vsak $x\in\mathbb{R}^3$.
   (d) Naj bo $z\in\mathbb{R}^3$ fiksen vektor. Ali je operator A, podan z $Ax=x\times z$, sebi-adjungiran?

4. Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom
$$f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$