

# Izpit iz Analize I

19. junij 2006

1. (a) Naj bosta  $a$  in  $b$  pozitivni realni števili. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- (b) Eksplicitno zapiši funkcijo  $f$ , podano z

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{4^n}.$$

2. Označimo  $x(t) = \int_1^t \frac{\sin u}{\sqrt{1+u+u^2}} du$  in  $y(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{\sqrt{1+u+u^2}} du$ .

Izračunaj dolžino loka krivulje  $(x(t), y(t))$ , ko parameter  $t$  preteče interval  $[1, t_0]$  in je  $t_0 > 1$  tista najmanjša vrednost parametra  $t$ , ko je tangenta prvič vzporedna z osjo  $x$ .

3. Naj bo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  in  $V$  množica vseh matrik, ki zadoščajo pogoju

$$\det(A + X) = \det(A) + \det(X).$$

- (a) Dokaži, da je  $V$  vektorski prostor in zapiši kakšno njegovo bazo.  
 (b) Poišči kakšno matriko  $A_0$ , da lahko vsako matriko  $X$  reda  $2 \times 2$  zapišemo v obliki  $X = \alpha A_0 + X_0$ , kjer je  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $X_0 \in V$ .

4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (a) Zapiši vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike  $A$ .  
 (b) Poišči kakšno matriko  $B$ , da je  $B^3 = A$ .