4. kolokvij iz Analize I

26. maj 2006

1. Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje največ n.

   (a) Dokaži, da predpis
   $$\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} p(i)\, q(i)$$
   določa skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Poišči kakšno ortonormirano bazo za $\mathbb{R}_n[x]$.
   Namig: Lagrangeova interpolacija.

   (c) Naj bo $A\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ linearni operator, podan s predpisom $(Ap)(x) = p(n-x)$. Ali je operator A sebi-adjungiran?
   Nasvet: Zapiši matriko, ki pripada adjungiranemu operatorju k A, v primerni bazi.

   (d) Naj bo $n = 2$. Poišči polinom q, za katerega je
   $$\langle p, q\rangle = p(0) + p(1) + p(2)$$
   za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

2. Opiši ploskev, podano z enačbo
   $$-3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4yz = 1,$$
   in poišči točke na tej ploskvi, ki so od koordinatnega izhodišča najmanj oddaljene.

3. Naj bo $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2}$.

   (a) Določi definicijsko območje funkcije f.

   (b) Ali je možno f zvezno razširiti do funkcije $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Točkovanje: $(10 + 10 + 15 + 15) + 30 + (10 + 10) = 100$.