4. kolokvij iz Analize I

29. maj 2007

1. Katera ploskev v prostoru je podana z enačbo
$$y^2 - 2xz = -1?$$

2. Naj bo $\mathbb{R}_3[x]$ vektorski prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje največ 3.

   (a) Dokaži, da je s predpisom
   $$\langle p, q\rangle = p(1)q(1) + p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1) + p'''(1)q'''(1)$$
   podan skalarni produkt na $\mathbb{R}_3[x]$ in poišči kakšno ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

   (b) Naj bo $D\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ operator odvajanja. Določi njegov adjungirani operator.

   (c) Za linearni funkcional $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, podan s predpisom
   $$f(p) = \int_0^1 p(x)\,dx,$$
   določi polinom $q \in \mathbb{R}_3[x]$, da bo veljalo $f(p) = \langle p, q\rangle$ za vsak $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

   (d) Kateri polinom iz jedra funkcionala f je najbližji polinomu $r(x) = x$?

3. Naj bo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ in } y \geq 0\}$. Določi maksimum in minimum funkcije f, podane s predpisom
$$f(x, y) = -6x^2 + 5xy - 6y^2 + x + y,$$
na množici D.

Točkovanje: $20 + (15 + 10 + 15 + 10) + 30 = 100$.