Izpit iz Analize I

19. september 2008

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}$ poljubno število. Razišči konvergenco zaporedja, podanega z začetnim členom $a_0 = A$ in rekurzivnim predpisom $a_n = \sqrt[3]{12a_{n-1} + 16}$ za $n \geq 1$.

2. Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če na intervalu $[0, \infty)$ zavrtimo graf funkcije f, podane s predpisom

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3 + 3\sqrt{x^2 + 1}},$$

okrog abscisne osi.

3. Na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je dan skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle$, v katerem je

$$\{1, (x-1), (x-1)^2\}$$

ortonormirana baza.

(a) Poišči ortogonalni komplement prostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x];\ \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0\}.$$

(b) Poišči kakšen pozitivno definiten endomorfizem A prostora $R_2[x]$ (glede na skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle$), da bo $[p, q] = \langle Ap, q \rangle$ tak skalarni produkt, v katerem je $\{1, x, x^2\}$ ortonormirana baza.

4. Na krogu $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x$.