Izpit iz Matematike 2

15. junij 2009

1. Izračunaj naslednjo $n \times n$ determinanto:

$$\left|\begin{matrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{matrix}\right].$$

2. Linearna preslikava $T\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ je definirana s predpisom $T(X) = AX + X^T A$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Določi jedro in zalogo vrednosti preslikave T.

   (b) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave T. Ali je T diagonalizabilna?

3. Dane so matrike $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{2,2}$. Za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ definiramo linearen funkcional $f_i\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f_i(X) = \operatorname{sled}(A_i X)$.

   (a) Dokaži, da so funkcionali f_1, f_2, f_3 in f_4 linearno neodvisni natanko takrat, ko so matrike A_1, A_2, A_3 in A_4 linearno neodvisne.

   (b) Naj bo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Določi tako bazo prostora $\mathbb{R}^{2,2}$, da bo $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ njena dualna baza.

4. Določi vse lokalne ekstreme funkcije f, podane s predpisom

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$