Izpit iz Matematike 2

1. september 2009

1. [**25 točk**] Določi vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike razsežnosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Naj bo $V = \{p \in \mathbb{R}_3[x]; p(0) = 0\}$. Na V definirajmo skalarni produkt s predpisom

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p'(x)q'(x)dx.$$

   (a) [**10 točk**] Dokaži, da je z zgornjim predpisom res definiran skalarni produkt na V.

   (b) [**10 točk**] Poišči kakšen skalaren produkt $[\ ,\ ]$ na prostoru $\mathbb{R}_3[x]$, za katerega velja $[p, q] = \langle p, q \rangle$ za vsaka $p, q \in V$.

   (c) [**10 točk**] Poišči kakšno ortonormirano bazo prostora V glede na skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle$.

   (d) [**15 točk**] Linearen funkcional $f : V \to \mathbb{R}$ je podan s predpisom $f(p) = p(1)$. Poišči $q \in V$, tako da bo $f(p) = \langle p, q \rangle$ za vsak $p \in V$.

3. [**30 točk**] Določi točke na ploskvi z enačbo

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz = 12,$$

ki so od koordinatnega izhodišča najbolj oz. najmanj oddaljene.