Matematika I

Matjaž Željko

NTF – Načrtovanje tekstilij in oblačil

Zapiski ob predavanjih v šolskem letu 2006/07

Izpis: 2. marec 2009

Kazalo

1 Množice in števila **4**
- 1.1 Množice . . . 4
- 1.2 Realna števila . . . 8
- 1.3 Podmnožice realnih števil . . . 10
- 1.4 Kompleksna števila . . . 13

2 Zaporedja in številske vrste **18**
- 2.1 Zaporedja . . . 18
- 2.2 Številske vrste . . . 33

3 Funkcije **41**
- 3.1 Splošni pojem funkcije . . . 41
- 3.2 Limita funkcije . . . 46
- 3.3 Zveznost . . . 50
- 3.4 Lastnosti zveznih funkcij . . . 54
- 3.5 Zveznost elementarnih funkcij . . . 58
- 3.6 Pregled elementarnih funkcij . . . 58
- 3.7 Enakomerna zveznost . . . 65

4 Diferencialni račun **66**
- 4.1 Odvod . . . 66
- 4.2 Geometrični pomen odvoda . . . 69
- 4.3 Pravila za odvajanje . . . 72
- 4.4 Odvodi elementarnih funkcij . . . 74
- 4.5 Diferencial funkcije . . . 79
- 4.6 Višji odvodi . . . 81
- 4.7 Lastnosti odvedljivih funkcij . . . 82
- 4.8 Konveksnost, konkavnost, prevoji . . . 88
- 4.9 Ekstremi funkcij . . . 90
- 4.10 Risanje grafov funkcij . . . 94
- 4.11 Odpravljanje nedoločenosti in L'Hôpitalovo pravilo . . . 99
- 4.12 Taylorjeva vrsta . . . 102

5 Integralski račun **109**
- 5.1 Nedoločeni integral . . . 109
- 5.2 Določeni integral . . . 121
- 5.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom . . . 125
- 5.4 Uporaba integrala . . . 136
- 5.5 Numerično računanje določenih integralov . . . 145

6 Vektorska algebra **148**
- 6.1 Vektorji . . . 148
- 6.2 Koordinatni sistem v prostoru . . . 152
- 6.3 Premica in ravnina v prostoru . . . 162
- 6.4 Razdalje med točkami, premicami in ravninami . . . 164

7 Matrike **168**
7.1 Operacije z matrikami 168

8 Determinante in sistemi linearnih enačb **172**
8.1 Permutacije 172
8.2 Determinante 173
8.3 Računanje determinant 175
8.4 Poddeterminante 178
8.5 Cramerjevo pravilo 179
8.6 Gaußova metoda za reševanje sistemov linearnih enačb 182
8.7 Rang matrike 186
8.8 Inverz matrike 189

9 Funkcije več spremenljivk **193**
9.1 Graf funkcije več spremenljivk 193
9.2 Odprte množice in okolice 197
9.3 Zveznost 198
9.4 Parcialni odvodi 202
9.5 Totalni diferencial 205
9.6 Verižno pravilo 208
9.7 Taylorjeva formula 210
9.8 Lokalni ekstremi 211
9.9 Metoda najmanjših kvadratov 217
9.10 Vezani ekstremi 218

10 Diferencialne enačbe **222**
10.1 Splošen pojem diferencialne enačbe 222
10.2 Diferencialne enačbe prvega reda 224
10.3 Diferencialne enačbe višjih redov 228
10.4 Sistemi diferencialnih enačb 234

1 Množice in števila

1.1 Množice

Množica A je določena, če obstaja pravilo, po katerem je mogoče za vsako reč odločiti ali je v A ali ne. Če a spada v množico A, pravimo, da je a *element* množice A in označimo $a \in A$. Če a ni element množice A, označimo $a \notin A$.

Množico lahko podamo tako, da zapišemo njene elemente:

$$A = \{1, 2, 3\} \ , \qquad B = \{\text{“modra”, “zelena”}\}.$$

Če je elementov zelo veliko (ali celo neskončno), jih ne moremo vse našteti. Tedaj raje povemo lastnost L, ki jo imajo natanko vsi elementi množice A. Slednje zapišemo kot $A = \{a;\ L(a)\}$. Npr.

$$C = \{x;\ |2x - 1| < 1\} \ , \quad D = \{n;\ n \text{ deli število } 12\}.$$

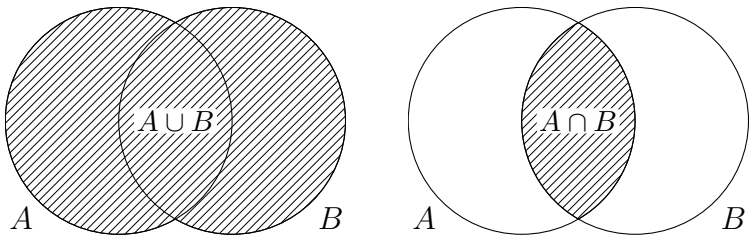
Možno je, da noben element nima lastnosti L; tedaj je A *prazna množica*, kar zapišemo $A = \emptyset$. Tako npr. velja $\{x;\ x \neq x\} = \emptyset$.

Operacije z množicami *Unija množic A in B* je množica $A \cup B$, definirana z

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ali } x \in B\}.$$

Presek množic A in B je množica $A \cap B$, definirana z

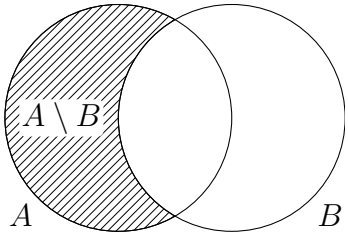
$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \in B\}.$$



Množica A *je podmnožica* množice B, z oznako $A \subseteq B$, če vsak element množice A leži tudi v množici B. Če je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$, imata množici A in B iste elemente in *sta enaki*. Oznaka: $A = B$.

Razlika množic A in B je množica $A \setminus B$, definirana z

$$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \notin B\}.$$



Včasih obravnavamo le podmnožice neke fiksne, dovolj velike množice U, ki jo v tem primeru imenujemo *univerzalna množica*. *Komplement množice* A (glede na univerzalno množico U) je množica A^c, definirana z $A^c = U \setminus A$.

Izrek 1 *Za poljubne množice A, B in C velja*

- *Distributivnost $\cup$ in $\cap$*
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- *Komutativnost $\cup$ in $\cap$*
  $A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A$
- *Asociativnost $\cup$ in $\cap$*
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \;\; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Idempotentnost $\cup$ in $\cap$*
  $A \cup A = A, \;\; A \cap A = A$
- *Absorbcija*
  $A \cup (A \cap B) = A, \;\; A \cap (A \cup B) = A$
- *Involutivnost komplementa*
  $(A^c)^c = A$
- *De Morganova zakona*
  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \;\; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- *Lastnost $\emptyset$*
  $A \cup \emptyset = A, \;\; A \cap \emptyset = \emptyset$
- *Lastnost univerzalne množice U*
  $A \cup U = U, \;\; A \cap U = A$
- *Komplementarnost U in $\emptyset$*
  $U^c = \emptyset, \;\; \emptyset^c = U$
- *Lastnost komplementa*
  $A \cup A^c = U, \;\; A \cap A^c = \emptyset$

Zgled 1 *Izračunaj $A \cup B$, $A \cap B$ in $A \setminus B$ za $A = \{2n-1;\; n = 1, 2, \ldots, 7\}$ in $B = \{3n-2;\; n = 1, 2, \ldots, 7\}$.*

Rešitev. Ker je $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ in $B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, je

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 16, 19\}, \\ A \cap B &= \{1, 7, 13\} \text{ in} \\ A \setminus B &= \{3, 5, 9, 11\}. \end{aligned}$$

■

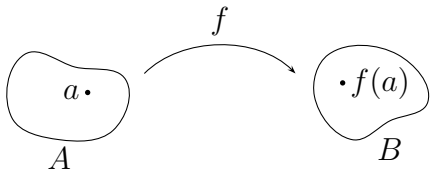
Naj bo $x \in A$ in $y \in B$. *Urejeni par* elementov x in y je množica $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ki jo krajše označimo z (x, y). Prepričamo se lahko, da iz $(x, y) = (x', y')$ sledi, da je $x = x'$ in $y = y'$. Torej je v urejenem pari vrstni red zapisa pomemben. Za $x \neq y$ sta tako para (x, y) in (y, x) različna, množici $\{x, y\}$ in $\{y, x\}$ pa ne.

Kartezični produkt množic A in B je množica $A \times B = \{(x, y);\; x \in A, y \in B\}$. Očitno je $A \times B = \emptyset$ natanko tedaj, ko je vsaj ena izmed množic A in B prazna. Iz definicije tudi sledi, da za različni neprazni množici A in B velja $A \times B \neq B \times A$.

Potenčna množica množice A je množica vseh podmnožic množice A in jo označimo s $\mathcal{P}(A)$. Torej $\mathcal{P}(A) = \{X;\; X \subseteq A\}$.

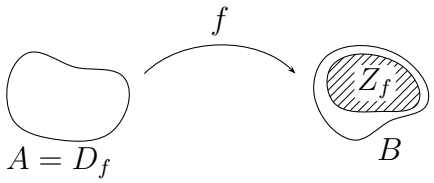
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- Za končno množico A z n elementi velja, da ima potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ natanko 2^n elementov.

Preslikave med množicami Naj bosta A in B množici. *Preslikava* $f\colon A \to B$ je pravilo f, ki vsakemu elementu a množice A priredi natančno določen element $f(a)$ množice B. (Preslikavo pogosto imenujemo tudi *funkcija*, zlasti, če je $A \subseteq \mathbb{R}$ in $B \subseteq \mathbb{R}$.)



Množica A je lahko tudi prazna, saj za vsako množico B obstaja "prazna" preslikava $\emptyset \to B$. Če pa je množica B prazna, obstaja preslikava $A \to \emptyset$, le če je tudi množica A prazna.

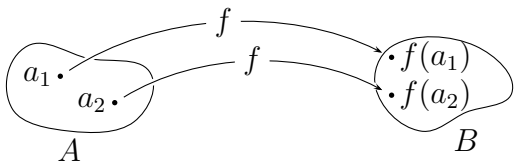
Množico A imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico $f(A) = \{f(a);\ a \in A\}$ pa *zaloga vrednosti* preslikave f. Definicijsko območje funkcije f označimo tudi z D_f, zalogo vrednosti pa z Z_f.



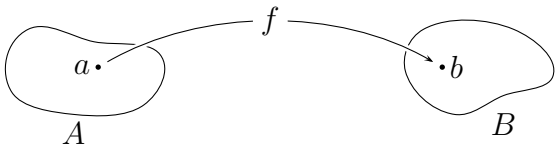
Zgled 2 *Ali sta funkciji* $f(x) = \frac{x}{x}$ *in* $g(x) = 1$ *enaki?*

Rešitev. Vprašanje je nekoliko nejasno zastavljeno. Zapisa $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$ v resnici nista funkciji, ampak le funkcijska predpisa. Kje sta funkciji f in g, podani s predpisoma $f(x) = \frac{x}{x}$ in $g(x) = 1$, sploh definirani? Če ju opazujemo kot funkciji $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, sta enaki. Najpogosteje pri funkciji, ki je podana le s predpisom, vzamemo njeno "naravno" definicijsko območje; torej tisto največjo množico točk v $\mathbb{R}$, za katere je funkcijski predpis sploh smiseln. V tem smislu sta f in g naravno definirani kot funkciji $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in nista enaki, saj imata različni definicijski območji. ■

Preslikava $f\colon A \to B$ je *injektivna*, če za vsaka $a_1, a_2 \in A$ velja: če je $a_1 \neq a_2$, velja $f(a_1) \neq f(a_2)$. (Ekvivalentno: f je injektivna, če za vsaka $a_1, a_2 \in A$ iz $f(a_1) = f(a_2)$ sledi $a_1 = a_2$.)

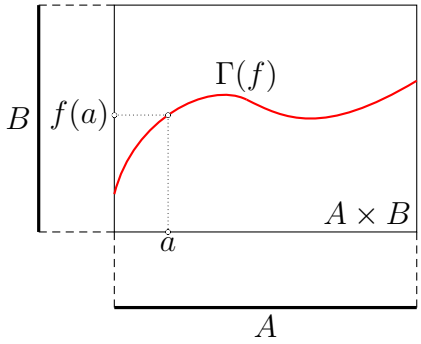


Preslikava $f\colon A \to B$ je *surjektivna*, če je $Z_f = B$. (Ekvivalentno: f je surjektivna, če za vsak $b \in B$ obstaja tak $a \in A$, da je $f(a) = b$.) Preslikava f je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.



Graf preslikave *Graf preslikave* $f\colon A \to B$ je množica

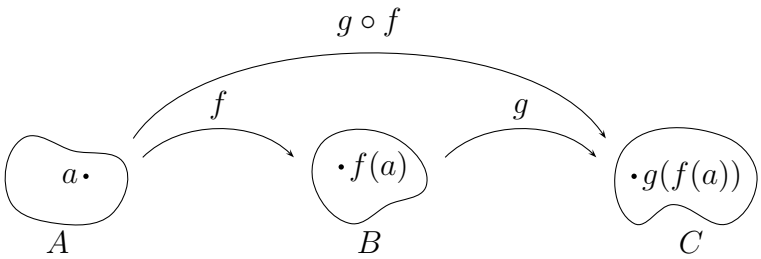
$$\Gamma(f) = \{(a, f(a));\ a \in A\} \subset A \times B.$$



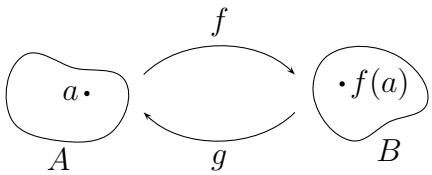
Z grafa funkcije lahko lepo razbermo injektivnost in surjektivnost. Funkcija f je injektivna, če vsaka vodoravna premica v $A \times B$ seka graf $\Gamma(f)$ največ enkrat. Funkcija f je surjektivna, če vsaka vodoravna premica v $A \times B$ seka graf $\Gamma(f)$ vsaj enkrat.

Preslikavo $f\colon A \to A$, definirano z $f(a) = a$, imenujemo *identična preslikava* množice A in označimo id_A.

Naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ preslikavi. *Kompozitum preslikav* f *in* g je preslikava $g \circ f\colon A \to C$, definirana z $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.



Naj bo $f\colon A \to B$ preslikava. Če obstaja taka preslikava $g\colon B \to A$, da je $g \circ f = id_A$ in $f \circ g = id_B$, pravimo, da je g *inverz preslikave* f in označimo $f^{-1} = g$.



Trditev 2 *Preslikava* $f\colon A \to B$ *je bijektivna natanko tedaj, ko ima inverz.*

Dokaz. Če je f bijektivna, za vsak $y \in B$ obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$. Torej lahko s predpisom $g(y) = x$ definiramo preslikavo $g\colon B \to A$. Po konstrukciji je $f \circ g = id_Y$. Če bi za nek $x \in A$ veljalo $g \circ f(x) = x' \neq x$, bi imeli $f(x) = f(x')$ za $x' \neq x$ in f ne bi bila injektivna. Slednje pa je v nasprotju s predpostavko trditve, kar pomeni, da je $g \circ f = id_X$.

Za dokaz v drugo smer vzemimo, da obstaja inverz preslikave f; torej taka preslikava $g\colon B \to A$, da je $g \circ f = id_A$ in $f \circ g = id_B$. Preslikava f je injektivna, saj iz $f(x) = f(x')$ sledi $g(f(x)) = g(f(x'))$ in $x = x'$. Preslikava je tudi surjektivna, saj se v dani $y \in B$ preslika $x = g(y)$. ■

Zgled 3 *Poišči bijektivno preslikavo med množicama* $A = \{2n - 1;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$ *in* $B = \{3n - 2;\ n = 1, 2, \ldots, 7\}$.

Rešitev. Najlaže bo, da element oblike $2n-1$ preslikamo v $3n-2$. Če je torej $x = 2n-1$, je $n = \frac{x+1}{2}$ in $3n - 1 = 3\frac{x+1}{2} - 2 = \frac{3x-1}{2}$. Nazadnje se sami prepričamo, da je $f\colon A \to B$, $f(x) = \frac{3x-1}{2}$, iskana bijekcija. (Bijekcija ni ena sama, ampak jih je $7! = 5040$.) ■

Naj bo $f\colon A \to B$ poljubna preslikava in $\tilde{A} \subset A$ podmnožica. *Zožitev preslikave* f na podmnožico $\tilde{A}$ je preslikava $f|_{\tilde{A}}\colon \tilde{A} \to B$, definirana z $f|_{\tilde{A}}(a) = f(a)$.

Zgled 4 *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, podana s predpisom* $f(x) = x^2 + 1$*, ni bijektivna. Za* $A = \{x;\ x \geq 0\}$ *in* $B = \{x;\ x \geq 1\}$ *je zožitev* $f|_A\colon A \to B$ *funkcije* f *bijektivna.*

Funkcija f ni injektivna, saj je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Funkcija f ni surjektivna, saj je $f(x) \geq 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Injektivnost zožitve: Če je $f|_A(x_1) = f|_A(x_2)$, je $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$, od koder sledi $x_1^2 = x_2^2$ oz. $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Če je $x_1 + x_2 = 0$, je zaradi $x_1 \geq 0$ in $x_2 \geq 0$ lahko le $x_1 = x_2 = 0$. Če je $x_1 + x_2 \neq 0$, mora biti $x_1 - x_2 = 0$, kar nas ponovno privede do edine možnosti $x_1 = x_2$.

Injektivnost zožitve: Vzemimo poljuben $y \geq 1$. Tedaj za $x = \sqrt{y - 1}$ velja $f|_A(x) = y$.
■

1.2 Realna števila

Realna števila sestavljajo množico, ki jo označimo z $\mathbb{R}$. Med realnimi števili je definiranih več računskih operacij. Osnovni dve sta seštevanje in množenje. Za poljubni dve števili $a \in \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$ obstaja natančno določeno realno število $a + b$, ki ga imenujemo *vsota števil* a in b. Za poljubni dve števili $a \in \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$ obstaja natančno določeno realno število $a \cdot b$ (krajše ab), ki ga imenujemo *produkt števil* a in b. Za seštevanje in množenje veljajo naslednji zakoni

I *Komutativnost seštevanja:*
$a + b = b + a$ za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$

II *Asociativnost seštevanja:*
$(a + b) + c = a + (b + c)$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

III *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje:*
Obstaja $0 \in \mathbb{R}$, da je $a + 0 = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$

IV *Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje:*
Za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja število $-a \in \mathbb{R}$, da je $a + (-a) = 0$

V *Komutativnost množenja:*
$a \cdot b = b \cdot a$ za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$

VI *Asociativnost množenja:*
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

VII *Obstoj enote za množenje:*
Obstaja $1 \in \mathbb{R}$, da je $1 \cdot a = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$

VIII *Obstoj inverznega elementa za množenje:*
Za vsak $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ obstaja $a^{-1} \in \mathbb{R}$, da je $a \cdot a^{-1} = 1$

IX *Distributivnostni zakon:*
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ za vsake $a, b, c \in \mathbb{R}$

X *Različnost števil* 0 *in* 1*:*
Velja $1 \neq 0$

Množici, opremljeni z operacijama seštevanja in množenja, ki zadoščata zahtevam I–X, pravimo *obseg*. Torej je množica realnih števil obseg.

Odštevanje in deljenje Za vsaki dve realni števili a in b obstaja natančno določeno realno število x (namreč število $b + (-a)$), da je $a + x = b$. Število x imenujemo *razlika števil b in a* in označimo z $b - a$. Velja $a + (b - a) = b$. Podobno za vsaki dve realni števili a, $a \neq 0$, in b obstaja natančno določeno realno število x, da je $ax = b$. Število x imenujemo *kvocient števil b in a* in označimo z $\frac{b}{a}$. Velja $a \cdot \frac{b}{a} = b$.

Urejenost množice $\mathbb{R}$ Realna števila delimo na pozitivna, negativna in število 0.

XI Če je $a \neq 0$, je od števil a in $-a$ natanko eno pozitivno. Število 0 ni ne pozitivno ne negativno.

XII Če sta števili a in b pozitivni, sta tudi števili $a + b$ in ab pozitivni.

Množico $\mathbb{R}$ uredimo po velikosti z dogovorom: če je $a - b$ pozitivno število, pravimo, da je *število a večje od b* in pišemo $a > b$. Podobno, če je $a - b$ negativno število, pravimo, da je *število a manjše od b* in pišemo $a < b$. Če je $a < b$ ali $a = b$, pišemo $a \leq b$. Če je $a > b$ ali $a = b$, pišemo $a \geq b$.

Lastnosti urejenosti:

- *Tranzitivnost*:
  Če je $a > b$ in $b > c$, je $a > c$.
- *Zakon trihotomije*:
  Za vsaki dve števili a in b velja natanko ena od treh možnosti $a > b$ ali $a < b$ ali $a = b$.
- Če je $a > b$, je $a + c > b + c$ za vsak $c \in \mathbb{R}$.

- Če je $a > b$ in $c > 0$, je $ac > bc$. Če je $a > b$ in $c < 0$, je $ac < bc$.
- Med poljubnima dvema realnima številoma leži vsaj eno realno število.

Absolutna vrednost Vsakemu realnemu številu x lahko priredimo realno število $|x|$ s predpisom

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \text{ in} \\ -x, & \text{če je } x < 0. \end{cases}$$

Število $|x|$ je vedno nenegativno in ga imenujemo *absolutna vrednost števila* x. Velja

$$\begin{array}{rcll} |x \cdot y| & = & |x| \cdot |y| & \\ \left|\dfrac{x}{y}\right| & = & \dfrac{|x|}{|y|} & \\ |x + y| & \leq & |x| + |y| & \textit{trikotniška neenakost} \end{array}$$

Geometrijsko pomeni $|x|$ razdaljo od točke X, ki upodablja število x, do točke O na številski premici. Splošneje: če sta x, y realni števili, je $|y - x|$ razdalja med njunima slikama na številski premici.

1.3 Podmnožice realnih števil

Naravna števila Naj bo $1 \in \mathbb{R}$ enota za množenje. Števila $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, ... imenujemo *naravna števila.* Množico *naravnih števil* $\{1, 2, 3, \ldots\}$ označimo z $\mathbb{N}$. Naravna števila so *induktivna množica*: če je $S \subseteq \mathbb{N}$ taka podmnožica, da je $1 \in S$ in velja sklep: če $n \in S$, potem $n + 1 \in S$, je $S = \mathbb{N}$. Tej lastnosti pravimo tudi *načelo matematične indukcije.*

Zgled 5 *Dokaži, da za vsako naravno število n velja*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Rešitev.

Označimo $S = \{n \in \mathbb{N};\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$. Množica S je torej množica tistih naravnih števil, za katera drži enakost (1). (*Induktivna hipoteza* je, da formula (1) drži za dano število n.)

Najprej preverimo, da je $1 \in S$.

Privzemimo sedaj, da je $n \in S$. Tedaj je $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Torej je $(1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, kar pomeni, da je tudi $n + 1 \in S$. Po načelu matematične indukcije je $S = \mathbb{N}$. Torej velja formula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ za vsako naravno število n. ■

Peanovi aksiomi Naravna števila lahko vpljemo tudi s pomočjo Peanovih aksiomov:

- 1 je naravno število.
- Vsakemu naravnemu številu n pripada natančno določeno naravno število n^+, ki ga imenujemo *naslednik* števila n.

- Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- [*Načelo indukcije*] Če je $S \subseteq \mathbb{N}$ taka podmnožica, da je $1 \in S$ in velja sklep: če $n \in S$, potem $n^+ \in S$, je $S = \mathbb{N}$.

S Peanovimi aksiomi lahko v množico naravnih števil vpeljemo tudi seštevanje in množenje.

Cela in racionalna števila Množico *celih števil* označimo z

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

To je najmanjša množica števil, v kateri je rešljiva enačba $a + x = b$ za vsaki naravni števili a in b.

Množico *racionalnih števil* označimo z $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. To je najmanjša množica števil, v kateri je rešljiva enačba $ax = b$ za vsaki celi števili a in b, $a \neq 0$.

Med njimi velja zveza

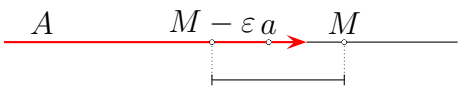
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

kjer so vse inkluzije prave.

Formalna izgradnja številskih množic v resnici poteka v tej smeri: Najprej vpeljemo množico naravnih števil kot induktivno množico in definiramo osnovni računski operaciji seštevanje in množenje. Ker enačba $a + x = b$ v množici naravnih števil ni vedno rešljiva, konstruiramo množico celih števil kot razširitev množice naravnih števil. Podobno konstruiramo racionalna števila kot tako razširitev množice celih števil, v kateri je enačba $ax = b$, $a \neq 0$, vedno rešljiva. Realna števila na koncu konstruiramo s pomočjo racionalnih števil tako, da zadostimo aksiomu XIII (Dedekindov aksiom; glej spodaj).

Omejene množice realnih števil Naj bo A neprazna množica realnih števil. Če obstaja število M, da je $a \leq M$ za vsak $a \in A$, pravimo, da je M *zgornja meja množice* A. Pravimo, da je množica A *navzgor omejena*, če obstaja kakšna zgornja meja množice A. Če obstaja število m, da je $m \leq a$ za vsak $a \in A$, pravimo, da je m *spodnja meja množice* A. Pravimo, da je množica A *navzdol omejena*, če obstaja kakšna spodnja meja množice A. Množica A je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol.

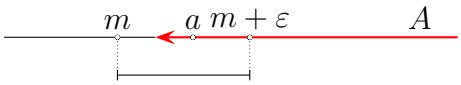
Število M je natančna zgornja meja množice A, če je zgornja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a > M - \varepsilon$. (Natančna zgornja meja je torej najmanjša zgornja meja množice A.)



Natančno zgornjo mejo množice A označimo s $\sup A$ in poimenujemo *supremum* množice A.

- Natančna zgornja meja vsakega (odprtega, zaprtega, polodprtega) intervala med a in b je število b.

Število m je natančna spodnja meja množice A, če je spodnja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a < m + \varepsilon$. (Natančna spodnja meja je torej največja spodnja meja množice A.)



Natančno spodnjo mejo množice A označimo z $\inf A$ in poimenujemo *infimum* množice A.

- Natančna spodnja meja vsakega (odprtega, zaprtega, polodprtega) intervala med a in b je število a.

XIII (Dedekindov aksiom) Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.

Aksiom XIII je ekvivalenten trditvi, da ima vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil natančno zgornjo mejo. Ta aksiom razloči med realnimi in racionalnimi števili. Množica $A = \{x;\ x^2 > 2 \text{ in } x > 0\}$ v množici racionalnih števil namreč nima natančne spodnje meje, v množici realnih števil pa je natančna spodnja meja (iracionalno) število $\sqrt{2}$.

Zgled 6 *Število $\sqrt{2}$ je iracionalno.*

Dokaz s protislovjem.

Recimo, da je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kjer je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek. Potem je $p^2 = 2q^2$. Torej $p = 2p_1$ in $2p_1^2 = q^2$. Sledi $q = 2q_1$ in $\frac{p}{q} = \frac{2p_1}{2q_1}$ v resnici ni okrajšan ulomek.

Izrek 3 (Arhimedova lastnost) *Če sta $x, y \in \mathbb{R}$ in je $y > 0$, obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $x < ny$.*

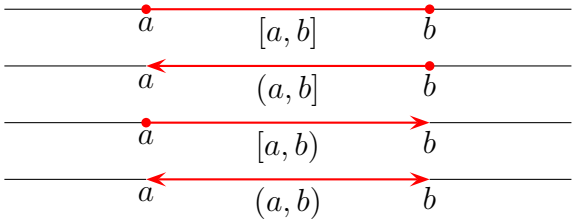
Dokaz. Recimo, da takega n ni. Potem je $x \geq ny$ za vsak n in je zato x zgornja meja množice $A = \{ny;\ n \in \mathbb{N}\}$. Označimo z M njeno natančno zgornjo mejo. Potem obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $ny > M - y$. Sledi $(n+1)y > M$. Ker je $(n+1)y \in A$, je to v protislovju s predpostavko, da je M natančna zgornja meja množice A. ■

Posledica 4 *Za vsako realno število a in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja racionalno število $\frac{p}{q}$, da je $|a - \frac{p}{q}| < \varepsilon$.* ■

Pravimo, da je množica racionalnih števil *gosta* v množici realnih števil.

Intervali in okolice Naj bosta a in b, $a \leq b$, poljubni realni števili. Definirajmo:

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} & \text{zaprt interval od } a \text{ do } b \\ (a,b] & = & \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} & \text{polodprt interval od } a \text{ do } b \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} & \text{polodprt interval od } a \text{ do } b \\ (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} & \text{odprt interval od } a \text{ do } b \end{array}$$



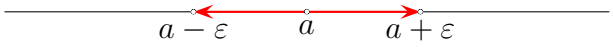
Pri $a = b$ je $[a, a] = \{a\}$, ostali intervali so prazne množice. Definiramo lahko tudi neskončne intervale, ki so pri ∞ vedno odprti, saj ∞ sploh ni število:

$$\begin{aligned}(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R};\ -\infty < x \leq b\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R};\ -\infty < x < b\} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < \infty\} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < \infty\} \\ (-\infty, \infty) &= \{x \in \mathbb{R};\ -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}\end{aligned}$$

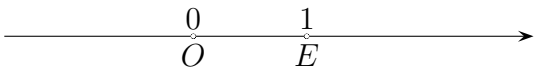
Za vsak $a \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$ imenujemo interval

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R};\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

ε-okolica točke a.



Številska premica Realna števila si lahko ponazorimo s točkami na številski premici. *Številska premica* je poljubna premica, na kateri smo si izbrali dve različni točki O in E. Točko O imenujemo *koordindatno izhodišče* in upodablja število 0. Točka E upodablja število 1.



Z nanašanjem daljice OE v eno ali v drugo stran od koordinatnega izhodišča dobimo slike celih števil. Z enostavno geometrijsko konstrukcijo (razmerja) lahko upodobimo racionalna števila. Velja pa še več:

Izrek 5 *Vsakemu realnemu številu pripada natanko ena točka na številski premici. Vsaka točka na številski premici je slika natanko enega realnega števila.* ■

1.4 Kompleksna števila

Poiskati želimo tako število, da je $x^2 = -1$ oz. želimo vpeljati takšna števila, da bo kvadratna enačba z realnimi koeficienti vedno rešljiva. *Kompleksno število* z je par realnih števil: $z = (a, b)$. Množico vseh kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$. Število a imenujemo *realna komponenta* števila z in označimo $a = \mathrm{Re}(z)$. Število b imenujemo *imaginarna komponenta* števila z in označimo $a = \mathrm{Im}(z)$. Za kompleksni števili $z = (a, b)$ in $w = (c, d)$ lahko definiramo njuno vsoto in produkt:

$$\begin{aligned}z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Prepričamo se lahko, da za seštevanje in množenje kompleksnih števil veljajo običajni računski zakoni: komutativnost, asociativnost, distributivnost.

Število $(0,0)$ je nevtralni element za seštevanje, število $(1,0)$ pa nevtralni element za množenje. Če je $z = (a,b) \neq (0,0)$, se lahko prepričamo, da za število

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

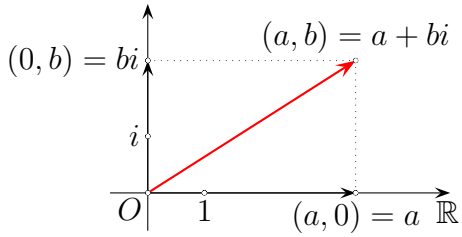
velja $z^{-1} \cdot z = (1,0)$. Tako definirano število z^{-1} imenujemo *inverz kompleksnega števila* z.

Ker za kompleksni števili $z = (a,0)$ in $w = (c,0)$ velja

$$\begin{aligned} z + w &= (a+c, 0) \\ z \cdot w &= (ac, 0), \end{aligned}$$

lahko kompleksno število $(a,0)$ identificiramo z realnim številom a. V smislu te identifikacije tudi velja, da je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Velja $(0,b) \cdot (0,b) = (-b^2, 0)$. Torej je za $b \neq 0$ kvadrat kompleksnega števila $(0,b)$ negativno realno število. Število $(0,b)$ imenujemo *čisto imaginarno število*. Med čisto imaginarnimi števili je število $i = (0,1)$ odlikovano in zanj velja $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Število i imenujemo *imaginarna enota*. Ker je $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) \cdot (1,0) + (b,0) \cdot (0,1)$, lahko zapišemo $z = a + bi$.



Če kompleksna števila pišemo v tej obliki, jih seštevamo in množimo kot binome. Pri množenju upoštevamo, da je $i^2 = -1$.

Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je število $a - bi$, ki ga označimo z $\bar{z}$. Kompleksno število z je realno natanko tedaj, ko je enako svoji konjugirani vrednosti.

Kvocient kompleksnih števil $z = a + bi$ in $w = c + di$, $c + di \neq 0$, izračunamo tako, da števec ulomka $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a+bi}{c+di}$ pomnožimo s konjugiramo vrednostjo imenovalca:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je (nenegativno) realno število

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Če je z realno število, se gornja definicija ujema z običajno definicijo absolutne vrednosti. Podobno kot za realna števila velja

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \quad \text{trikotniška neenakost} \end{aligned}$$

$$|\bar{z}| \;=\; |z|.$$

Dokažimo npr. prvo formulo. Za $z = a+bi$ in $w = c+di$ je $zw = (ac-bd)+(ad+bc)i$ in

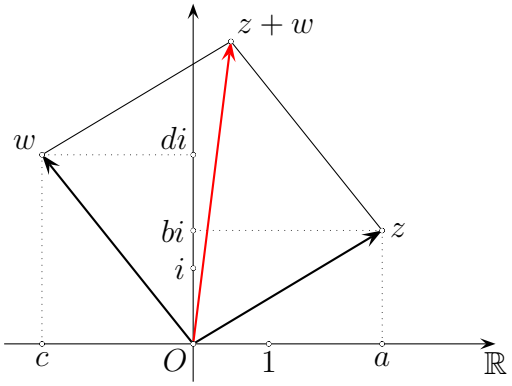
$$|zw| = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|\,|w|.$$

Zgled 7 *Naj bo $z = 3+4i$, $w = 1-2i$. Izračunaj $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$, $z+w$, $z-w$, zw in $\frac{z}{w}$.*

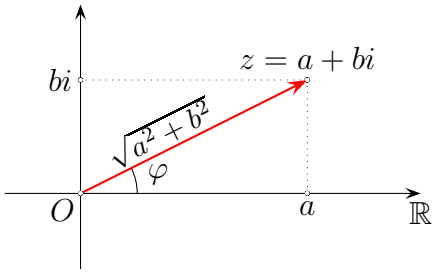
Rešitev.

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= 3-4i \\
|z| &= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(3+4i)(3-4i)} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\frac{1}{z} &= \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - i\frac{4}{25} \\
z+w &= (3+4i)+(1-2i) = (3+1)+(4-2)i = 4+2i \\
z-w &= (3+4i)-(1-2i) = (3-1)+(4-(-2))i = 2+6i \\
zw &= (3+4i)\cdot(1-2i) = 3\cdot 1 + 4\cdot(-2)i^2 + (3\cdot(-2)+4\cdot 1)i = 11-2i \\
\frac{z}{w} &= \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{1+4} = -1+2i
\end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija kompleksnega števila Kompleksnemu številu $z = a+ib$ priredimo točko $Z = (a,b)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$. Realna komponenta števila z ustreza abscisi točke Z, imaginarna komponenta pa ordinati točke Z. Seštevanje števil $z = a+ib$ in $w = c+id$ razumemo kot seštevanje vektorjev, saj velja $a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d)$.



Absolutna vrednost $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ meri razdaljo od točke Z do koordinatnega izhodišča. Kot, ki ga s pozitivno smerjo abscisne osi oklepa vektor od izhodišča do točke Z, imenujmo *argument* kompleksnega števila z in ga označimo z $\arg z$.



S slike razberemo, da je $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kjer je $|z| = r$ in $\arg z = \varphi$. Zapis $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ imenujemo *polarni zapis kompleksnega števila*. Če je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, je

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2}$$

Če je $r_2 = 1$, razumemo množenje s številom $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ kot vrtež okoli koordinatnega izhodišča za kot φ_2. Če v formuli (2) postavimo $z = z_1 = z_2$, dobimo $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$. Z indukcijo preverimo, da velja

$$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3}$$

Formuli (3) pravimo *Moivrova formula*.

Zgled 8 *Izračunaj* $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$.

Rešitev. Za $z = -1 + i\sqrt{3}$ izračunamo $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ in $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, od koder sledi $\varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$, saj leži točka $(-1, \sqrt{3})$ v drugem kvadrantu. Sedaj po Moivrovi formuli izračunamo

$$z^{12} = r^{12}(\cos 12\varphi + i\sin 12\varphi) = 2^{12}(\cos 8\pi + i\sin 8\pi) = 2^{12}$$

Koreni enote Dano je kompleksno število w. Iščemo vse rešitve enačbe

$$z^n = w. \tag{4}$$

Pišimo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $w = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$. Po Moivrovi formuli velja

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

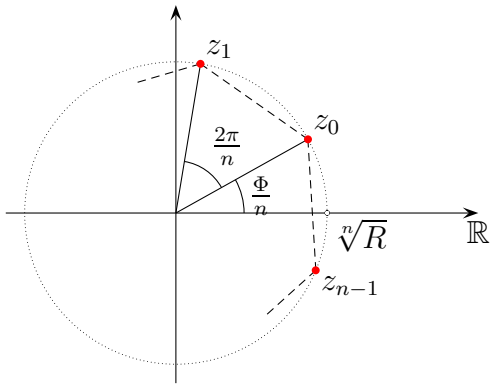
od koder sledi

$$\begin{aligned} r^n &= R \\ \cos n\varphi + i\sin n\varphi &= \cos\Phi + i\sin\Phi. \end{aligned}$$

Ker je $r \geq 0$ in $R \geq 0$, iz prve enačbe sledi $r = \sqrt[n]{R}$. Iz druge enačbe sledi, da je $\cos n\varphi = \cos\Phi$ in $\sin n\varphi = \sin\Phi$. Torej se kota $n\varphi$ in Φ razlikujeta za večkratnik polnega kota. Sledi $n\varphi = \Phi + 2k\pi$ in $\varphi = \frac{1}{n}(\Phi + 2k\pi)$. Vse rešitve enačbe $z^n = w$ so

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Phi + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots n-1. \tag{5}$$

Te točke so oglišča nekega n-kotnika v kompleksni ravnini.



Pri $w = 1$ imamo $R = 1$ in $\Phi = 0$. Enačba $z^n = 1$ ima rešitve

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots n-1, \tag{6}$$

ki jih imenujemo *koreni enote*. Korene enote si lahko v ravnini $\mathbb{C}$ predstavljamo kot oglišča pravilnega n-kotnika, katerega središče leži v koordinatnem izhodišču, eno oglišče pa v točki 1. (Polmer krožnice, očrtane temu n-kotniku, je 1.)

Zgled 9 *Zapiši vse rešitve enačbe $z^5 = 32$.*

Rešitev. Gre za enačbo oblike $z^n = w$, kjer je $n = 5$ in w pozitivno realno število. Torej so vse rešitve oblike $z_k = \sqrt[5]{32}\zeta_k = 2\zeta_k$, kjer so $\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ običajni peti koreni enote. ■

Zgled 10 *Zapiši vse rešitve enačbe $z^4 = -1$.*

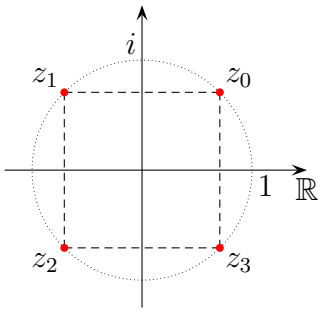
Rešitev. Gre za enačbo oblike $z^n = w$, kjer je $n = 4$ in $w = -1$. Torej moramo najprej pretvoriti w v polarni zapis: $w = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, od koder sledi $R = 1$ in $\Phi = \pi$. Vse rešitve gornje enačbe so

$$z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad \text{za } k = 0, 1, 2, 3,$$

kar lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Te točke so oglišča nekega kvadrata v kompleksni ravnini.



2 Zaporedja in številske vrste

2.1 Zaporedja

Zaporedje realnih števil je preslikava $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Običajno namesto $a(n)$ pišemo a_n. Število a_n imenujemo n-ti *člen zaporedja*, število n pa *indeks* člena a_n. Zaporedje s splošnim členom a_n označimo z (a_n).

Zaporedje je lahko podano

- *eksplicitno*: s pomočjo funkcijskega predpisa $a_n = f(n)$
- *implicitno* oz. *rekurzivno*: zapišemo prvih nekaj členov zaporedja in pravilo, kako izračunamo naslednji člen s pomočjo prejšnjih.

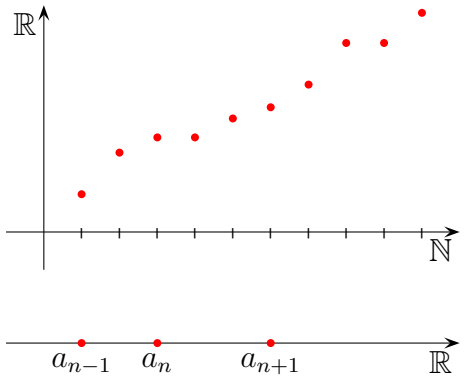
Zaporedje lahko ponazorimo

- s *sliko* množice točk $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ na realni osi ali
- z *grafom* $\Gamma(a) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ funkcije $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Zgledi zaporedij

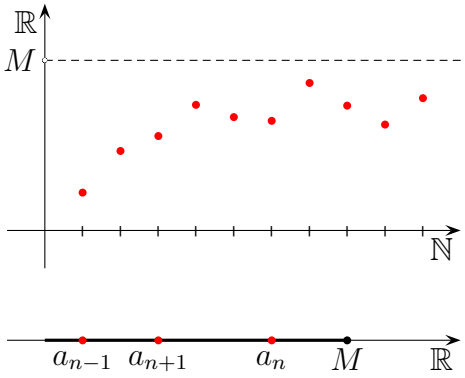
- Zaporedje s splošnim členom $a_n = 2^{-n}$ je 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, ...
- Zaporedje $(a_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ ima splošni člen $a_n = (-1)^n = \cos(n\pi)$.
- *Aritmetično zaporedje* Podamo a_1 in razliko d med poljubnima sosednjima členoma: $a_{n+1} - a_n = d$. Sledi $a_n = a_1 + (n-1)d$.
  Ugodneje $a_n = a_0 + nd$.
- *Geometrično zaporedje* Podamo a_1 in kvocient q med poljubnima sosednjima členoma: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Sledi $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ugodneje: $a_n = a_0 q^n$.
- *Fibonaccijevo zaporedje* Podamo $a_1 = a_2 = 1$ in $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Velja $a_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$

Zaporedje je *naraščajoče*, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak indeks n.



Zaporedje je *padajoče*, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak indeks n. Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Zaporedje je *navzgor omejeno*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak n. Število M imenujemo *zgornja meja* zaporedja.

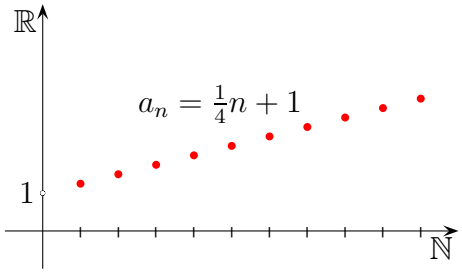


Zaporedje je *navzdol omejeno*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak n. Število m imenujemo *spodnja meja* zaporedja.

Zaporedje je *omejeno*, če je navzgor in navzdol omejeno.

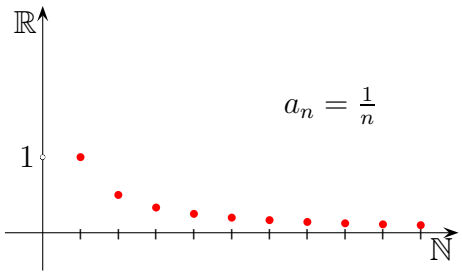
Iz definicije vidimo, da je naraščajoče zaporedje navzdol omejeno, padajoče pa navzgor omejeno.

Zgled 11 *Razišči zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{4}n + 1$.



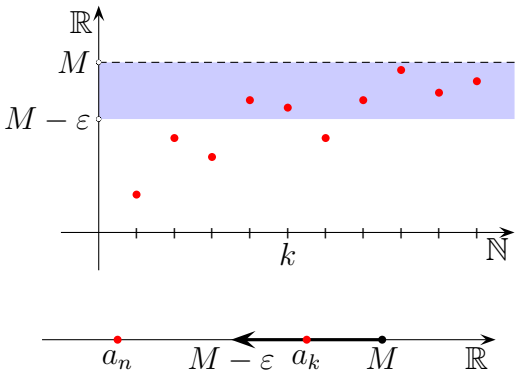
Zaporedje ima člene $a_1 = \frac{5}{4}$, $a_2 = \frac{6}{4}$, $a_3 = \frac{7}{4}$, ... Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4} > 0$, je zaporedje naraščajoče. Torej je navzdol omejeno. Zaporedje ni navzgor omejeno.

Zgled 12 *Razišči zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{n}$.

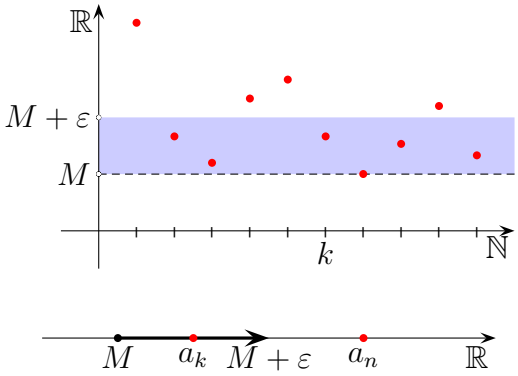


Zaporedje ima člene $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... Ker je $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, je zaporedje padajoče. Torej je navzgor omejeno. Ker je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje tudi navzdol omejeno. Torej je zaporedje omejeno.

Oglejmo si množico $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vseh členov zaporedja (a_n). Spomnimo se, da je število M natančna zgornja meja množice A, če je M zgornja meja množice A in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $a \in A$, da je $a > M - \varepsilon$. Torej lahko rečemo, da je število M *natančna zgornja meja zaporedja* (a_n), z oznako $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, če je $a_n \leq M$ za vsak n in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja indeks k, da je $a_k > M - \varepsilon$.



Povsem analogno definiramo, da je število M *natančna spodnja meja zaporedja* (a_n), z oznako $M = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, če je $a_n \geq M$ za vsak n in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja indeks k, da je $a_k < M + \varepsilon$.

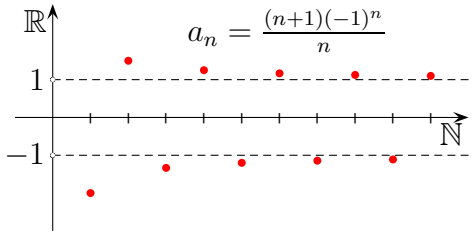


Po aksiomu XIII vidimo, da ima vsako omejeno zaporedje natančno zgornjo in spodnjo mejo.

Opozoriti velja, da $\inf a_n$ **ne pomeni najmanjši člen** zaporedja. Tudi če $\inf a_n$ obstaja, ni nujno, da je $\inf a_n = a_N$ za neki $N \in \mathbb{N}$. Podobno tudi $\sup a_n$ **ne pomeni največji člen** zaporedja. Tudi če $\sup a_n$ obstaja, ni nujno, da je $\sup a_n = a_N$ za neki $N \in \mathbb{N}$.

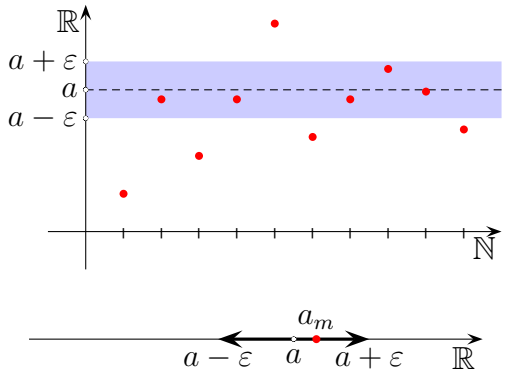
Obratna trditev pa drži. Če najmanjši člen zaporedja obstaja (označimo ga z $\min a_n$), je seveda $\inf a_n = \min a_n$. Podobno je tudi $\sup a_n = \max a_n$, če le največji člen zaporedja obstaja (označimo ga z $\max a_n$).

Zgled 13 *Določi natančno zgornjo in spodnjo mejo zaporedja s splošnim členom* $a_n = \frac{(n+1)(-1)^n}{n}$.

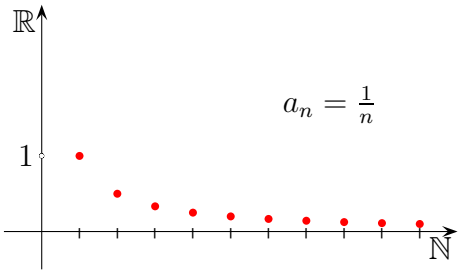


Zaporedje s členi $|a_n| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ je padajoče k 1. Torej je (pod)zaporedje s sodimi indeksi padajoče k 1, (pod)zaporedje z lihimi pa naraščajoče k -1. Torej je $\sup a_n = \max a_n = a_2 = \frac{3}{2}$ in $\inf a_n = \min a_n = a_1 = -2$.

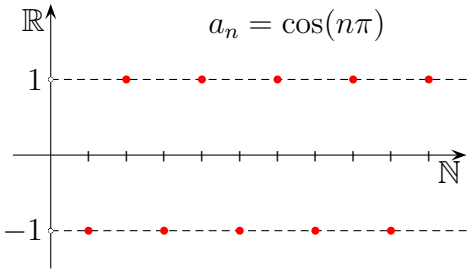
Stekališče zaporedja Število a je *stekališče zaporedja* (a_n), če za vsak $\varepsilon > 0$ in obstaja neskončno indeksov m, da je $|a - a_m| < \varepsilon$. Drugače povedano, število a je stekališče zaporedja (a_n), če je v vsaki njegovi okolici neskončno členov tega zaporedja.



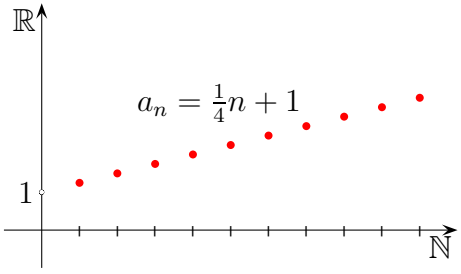
Zgled 14 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{n}$ *ima (edino) stekališče v točki* 0. *Število* 0 *ni člen tega zaporedja.*



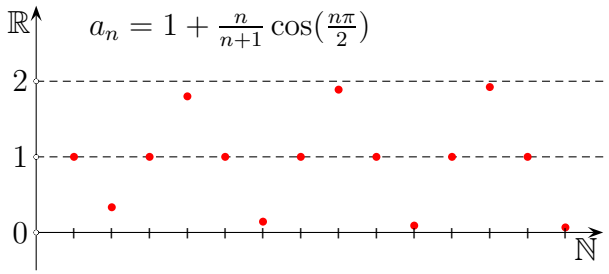
Zgled 15 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = (-1)^n$ *ima stekališči v točkah* 1 *in* -1, *ki sta tudi člena zaporedja.*



Zgled 16 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{1}{4}n + 1$ *nima stekališč.*



Zgled 17 *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos(\frac{n\pi}{2})$ *ima stekališča v točkah* 0, 1 *in* 2. *Točka* 1 *je tudi člen tega zaporedja.*



Za $n = 4k \pm 1$ velja $a_n = 1 + \frac{4k\pm1}{4k\pm1+1} \cdot 0 = 1$.
Za $n = 4k$ velja $a_n = 1 + \frac{4k}{4k+1} \cdot 1 \to 2$.
Za $n = 4k + 2$ velja $a_n = 1 + \frac{4k+2}{4k+3} \cdot (-1) \to 0$.

Kot kažejo zgornji primeri, ima lahko zaporedje nič, eno ali več stekališč. Tudi če je zaporedje omejeno, ima lahko več stekališč. Z nekoliko truda lahko konstruiramo tudi zaporedje, ki ima neskončno stekališč.

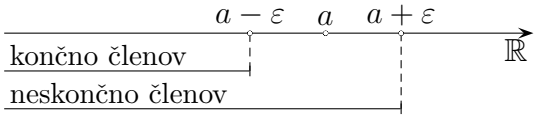
Da bi zaporedje realnih števil ne imelo nobenega stekališča, mora biti neomejeno, saj velja:

Izrek 6 *Vsako omejeno zaporedje ima stekališče.*

Dokaz. Naj bo $m = \inf a_n$ in $M = \sup a_n$. Množica

$$A = \{x \in \mathbb{R}; a_n < x \text{ za največ končno } n\}$$

je neprazna, saj je $m \in A$. Je omejena, saj $x < M$ za vsak $x \in A$. Torej ima natančno zgornjo mejo $a = \sup A$.



Število a je stekališče zaporedja. Za $\varepsilon > 0$ je $a - \varepsilon \in A$ in $a + \varepsilon \notin A$. Levo od $a - \varepsilon$ je končno mnogo členov zaporedja, levo od $a + \varepsilon$ pa neskončno. Torej jih je na intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno. ■

Alternativen dokaz: Ker je zaporedje (a_n) omejeno, obstajata števili A_1 in B_1, da je $A_1 \le a_n \le B_1$ za vsak n. Razpolovimo interval. Ker je zaporedje neskončno, na vsaj enem od podintervalov $[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}]$ in $[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1]$ leži neskončno členov zaporedja. Označimo ta podinterval z $[A_2, B_2]$. Ko interval $[A_2, B_2]$ razpolovimo, na vsaj enem izmed dobljenih podintervalov (označimo ga z $[A_3, B_3]$) leži neskončno členov zaporedja. Postopek ponavljamo.

Dobimo neskončno zaporedje intervalov, pri katerem vsak nadaljnji interval leži v prejšnjem in je od njega pol krajši. Leva krajišča torej sestavljajo naraščajoče in navzgor (z B_1) omejeno zaporedje, desna pa padajoče in navzdol (z A_1) omejeno zaporedje. Označimo $A = \sup A_n$ in $B = \inf B_n$. Potem je

$$A_1 \le A_2 \le \ldots \le A = B \le B_2 \le B_1.$$

(Enakost $A = B$ velja zato, ker gredo dolžine intervalov proti 0.)

Dokažimo, da je točka $s = A = B$ iskano stekališče. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $s = \sup A_n$, obstaja n_1, da je $A_{n_1} > s - \varepsilon$. Ker je $s = \inf B_n$, obstaja n_2, da je $A_{n_2} < s + \varepsilon$. Označimo $m = \max\{n_1, n_2\}$. Torej leži interval $[A_m, B_m]$ v celoti v ε-okolici točke s. Po konstrukciji pa v intervalu $[A_m, B_m]$ leži neskončno členov zaporedja.

Opomba. Videli smo že, da ima vsako omejeno zaporedje ima natančno zgornjo in spodnjo mejo. Če je zaporedje monotono, je ena od teh dveh mej tudi stekališče. Zaporedje $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 2$ pa ima stekališče 0, vendar je $\sup a_n = 1$ in $\inf a_n = -1$.

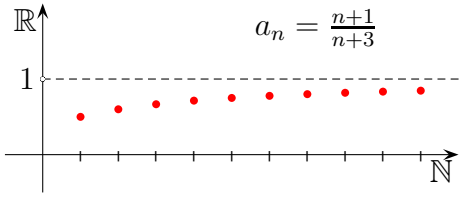
Limita zaporedja Število a je *limita zaporedja* a_n, z oznako $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n \geq N$. Drugače povedano, a je limita zaporedja a_n, če v vsaki njegovi okolici ležijo vsi členi od nekega člena dalje. Torej je vsaka limita tudi stekališče, obrat pa ne drži, saj ima lahko zaporedje več stekališč. Zaporedje je *konvergentno*, če obstaja limita tega zaporedja. Zaporedje je *divergentno*, če ni konvergentno.

Zgled 18 *Dokaži, da za zaporedje* $a_n = \frac{1}{n}$ *velja* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Od katerega člena dalje ležijo vsi členi v* ε*-okolici limitne točke za* $\varepsilon = \frac{1}{100}$*?*

Rešitev. Za dani $\varepsilon > 0$ označimo $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Torej je $\frac{1}{N} < \varepsilon$ in je zato $a_n \leq a_N = \frac{1}{N} < \varepsilon$ za vsak $n \geq N$. Posebej, pri $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ležijo v ε-okolici limitne točke vsi členi od vključno člena a_{101} dalje. ■

Zgled 19 *Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom* $a_n = \frac{n+1}{n+3}$.

Rešitev. Ker je $\frac{n+1}{n+3} = 1 - \frac{2}{n+3}$, domnevamo, da bo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1$.



Naj bo $\varepsilon > 0$. Da bi vsi členi od N-tega dalje ležali v ε-okolici točke 1, mora veljati $|a_n - 1| < \varepsilon$ za $n \geq N$. Torej mora biti $|\frac{2}{n+3}| < \varepsilon$ oz. $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Če torej izberemo poljubno tako naravno število N, da je $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, bo za vsak $n \geq N$ veljalo $|a_n - 1| < \varepsilon$. ■

V skladu z definicijo je limita zaporedja tudi njegovo stekališče, obrat pa ne drži. Zaporedje ima lahko več stekališč in zato ni konvergentno.

Izrek 7 *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

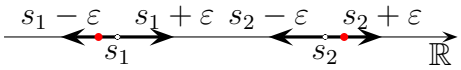
Dokaz. Naj bo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Torej leži izven intervala $(a-1, a+1)$ le končno mnogo členov zaporedja a_n. Množica

$$A = \{a-1, a+1\} \cup \{a_n;\ a_n \notin (a-1, a+1)\}$$

je končna in ima natančno spodnjo in zgornjo mejo: m in M. Sledi $m \leq a_n \leq M$ za vsak n. ■

Zaporedje, ki ni omejeno, ne more biti konvergentno. Prav tako ne more biti konvergentno zaporedje, ki ima več kot eno stekališče.

Izrek 8 *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.*



Dokaz. Recimo, da je zaporedje konvergentno in označimo njegovo limito z s_1. Po že dokazanem je omejeno. V skladu z definicijo je limita zaporedja tudi njegovo stekališče. Recimo, da ima zaporedje še eno stekališče, ki ga označimo z s_2. Označimo $\varepsilon = \frac{1}{2}|s_2 - s_1|$. Potem znotraj ε-okolic za s_1 in s_2 leži neskončno členov tega zaporedja, kar pomeni, da nobena izmed točk s_1 in s_2 ni limita tega zaporedja. ■

Zgled 20 *Zaporedje s splošnim členom $a_n = (-1)^n$ ni konvergentno, ker ima dve stekališči. Zaporedje s splošnim členom $a_n = n$ ni konvergentno, ker nima stekališč. (To zaporedje je namreč monotono in neomejeno.)* ■

Cauchyjevo zaporedje Zaporedje je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vsaka $m, n \geq N$.

Izrek 9 *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je zaporedje a_n konvergentno. Označimo z a njegovo limito. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq N$. Če sta torej $m, n \geq N$, je

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Za dokaz v drugo smer pa privzemimo, da je zaporedje Cauchyevo. Potem obstaja N_0, da je $|a_m - a_n| < 1$ za vse $m, n \geq N_0$. Posebej to pomeni, da je $|a_m - a_{N_0}| < 1$ za vse $n \geq N_0$ in je zaporedje omejeno. Torej ima vsaj eno stekališče, ki ga označimo z a. Dokažimo, da je a limita zaporedja (a_n). Izberimo in fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Obstaja nek N, da je $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $m, n \geq N$. Vzemimo sedaj poljuben $n \geq N$. Potem leži a_n na intervalu $(a_N - \frac{\varepsilon}{2}, a_N + \frac{\varepsilon}{2})$ in zato leži stekališče a na intervalu $[a_N - \frac{\varepsilon}{2}, a_N + \frac{\varepsilon}{2}]$. Sledi

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Torej je a limita zaporedja (a_n). ■

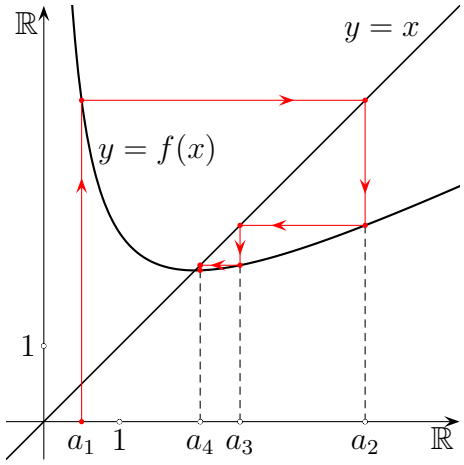
Izrek 10 *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Dokaz. Naj bo (a_n) npr. naraščajoče zaporedje. Ker je zaporedje omejeno, obstaja njegova natančna zgornja meja, ki jo označimo z a. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja N, da je $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Ker je zaporedje monotono in navzgor omejeno z a, je $a - \varepsilon < a_n \leq a$ za vsak $n \geq N$. Torej ležijo v ε-okolici števila a vsi členi od N-tega dalje in je zato $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Rekurzivno podana zaporedja Zaporedje je podano z *rekurzivno zvezo reda* k, če so podani členi $a_1, \ldots, a_k$ in pravilo, kako za vsak n s pomočjo členov $a_n, \ldots, a_{n+k-1}$ določino a_{n+k}, tj. $a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$.

Zgled 21 *Dokaži, da je rekurzivno podano zaporedje* $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{4}{a_n})$, *konvergentno in izračunaj njegovo limito.*

Rešitev. Označimo $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$. Zapišimo nekaj njegovih členov: $a_1 = 0.5$, $a_2 = \frac{17}{4} = 4.25$, $a_3 \approx 2.5956$, $a_4 \approx 2.0683$, $a_5 \approx 2.0011$, ...



Kot kaže slika, lahko domnevamo, da je od člena a_2 dalje zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 2.

Zaporedje je padajoče: $a_{n+1} - a_n = \frac{4-a_n^2}{2a_n} < 0$, če je $a_n > 2$.

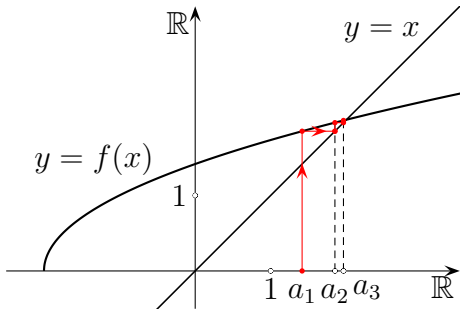
Zaporedje je navzdol omejeno z 2: $a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n-2)^2}{2a_n} > 0$.

Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je po izreku 10 konvergentno.

Označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sledi $a = \frac{1}{2}(a + \frac{4}{a})$, od koder sledi $a^2 = 4$ in $a = 2$, ker je $a > 0$.

Zgled 22 *Izračunaj limito zaporedja, podanega z* $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$.

Rešitev. Označimo $f(x) = \sqrt{2+x}$. Zaporedje lahko podamo rekurzivno z začetnim členom $a_1 = \sqrt{2}$ in zvezo $a_{n+1} = f(a_n)$. Označimo $f(x) = \sqrt{2+x}$.



Recimo, da limita zaporedja obstaja. Označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sledi $a = \sqrt{a+2}$, od koder izpeljemo $a^2 - a - 2 = 0$ in $a = 2$. (Rešitev $a = -1$ odpade, saj je $\sqrt{2+a} \geq 0$.) Z grafa razberemo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2.

Dokažimo z indukcijo, da je navzor omejeno z 2. Očitno je $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Če je $a_n \leq 2$, je $2 + a_n \leq 4$ in $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq 2$.

Dokažimo, da je zaporedje naraščajoče. Dokazati, je potrebno, da je $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Pogoj je ekvivalenten z $\sqrt{2+a_n} \geq a_n$, kar lahko preoblikujemo v $2 + a_n \geq a_n^2$ oz. $(a_n - 2)(a_n + 1) \leq 0$. Slednje drži, saj je $0 \leq a_n \leq 2$ za vsak indeks n.

Dokazali smo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno, torej konvergentno. Limita $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ res obstaja in po že dokazanem je $a = 2$.

Operacije z zaporedji

Izrek 11 *Če sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, so tudi zaporedja $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ in $(a_n b_n)$ konvergentna ter velja*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n. \end{aligned}$$

Če velja še $b_n \neq 0$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Dokaz. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Če je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ in $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. Podobno dokažemo, da je tudi $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Za dokaz konvergentnosti zaporedja $a_n b_n$ ocenimo

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + (b_n - b)a| = \\ &\leq |(a_n - a)(b_n - b)| + |(a_n - a)b| + |(b_n - b)a| < \\ &< \varepsilon^2 + (|a| + |b|)\varepsilon, \end{aligned}$$

kjer smo privzeli, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ in $|b_n - b| < \varepsilon$. Torej lahko izberemo tak $\varepsilon > 0$, da je vrednost izraza $|a_n b_n - ab|$ poljubno majhna in je zato res $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

Za dokaz četrte formule pa najprej dokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Ocenimo

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|bb_n|} < \frac{\varepsilon}{|b|(|b| - \varepsilon)} < \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

za $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$. Po že dokazanem pa je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. ■

Opomba. Predpostavka o konvergentnosti zaporedij a_n in b_n je bistvena. Če npr. postavimo $a_n = (-1)^n$ in $b_n = (-1)^{n+1}$, je seveda $a_n + b_n = 0$, $a_n b_n = -1$, za vsak n in $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -1$, zaporedji a_n in b_n pa seveda nista konvergentni.

Posledica 12 *Če je zaporedje (a_n) konvergentno, je tudi zaporedje ca_n konvergentna in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) \;=\; c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dokaz. Postavimo $b_n = c$ za vsak n in uporabimo gornji izrek. ■

Zgled 23 *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{3n^2+n+1}$.

Rešitev. Ker je $\frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2-2n+1}{3n^2+n+1}$, delimo števec in imenovalec tega ulomka z najvišjo potenco; torej z n^2. Dobimo $\frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2-2n+1}{3n^2+n+1} = \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - 0 - 0 = 1,$$

saj vse limite na desni obstajajo. Podobno je tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 3 + 0 + 0 = 3.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{3}.$$

Zgled 24 *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

Rešitev. Čeprav lahko zapišemo $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$ in je $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^2} = 0$ za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$, **ne smemo sklepati**, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$. Izrek $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ lahko sicer razširimo na poljubno, vendar **fiksno** število členov, v izrazu $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ pa število členov ni fiksno, ampak se spreminja hkrati z n. Za rešitev moramo torej ubrati drugačno pot.

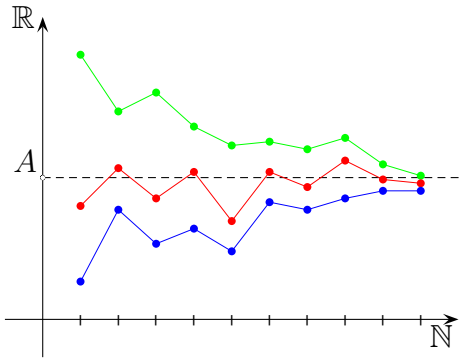
Kot smo že videli, je $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, zato lahko zapišemo

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty} 2} = \frac{1}{2}.$$

Izrek 13 (Izrek o sendviču) *Če sta zaporedji* (a_n) *in* (b_n) *konvergentni in imata enaki limiti ter je* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *za vsak* $n \geq N$*, je tudi zaporedje* (c_n) *konvergentno in velja* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$.



Označimo $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = A$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja n_1, da je $a_n > A-\varepsilon$ za $n \geq n_1$. Potem obstaja n_2, da je $b_n < A+\varepsilon$ za $n \geq n_2$. Torej za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, N\}$ velja

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Sledi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. ■

Zgled 25 *Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Očitno je $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, je tudi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Potence in koreni Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$. Produkt n enakih faktorjev a imenujemo n-ta *potenca števila* a in označimo z a^n. Število a je *osnova*, število n pa *eksponent*. Z indukcijo preverimo, da velja

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ (a^m)^n &= a^{m\cdot n} \\ (ab)^m &= a^m b^m \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \end{aligned}$$

(V zadnjih dveh formulah smo privzeli, da je $a \neq 0 \neq b$, v zadnji pa še dodatno, da je $m > n$.) Če dodatno postavimo

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{in} \quad a^0 = 1,$$

veljajo gornje formule za vse celoštevilske eksponente m in n.

Izrek 14 *Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Tedaj za $|a| < 1$ zaporedje s splošnim členom $a_n = a^n$ konvergira k 0, za $a = 1$ zaporedje (a_n) konvergira k 1, v vseh ostalih primerih pa je zaporedje (a_n) divergentno.*

Dokaz. Če je $a = 0$, je očitno $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Naj bo $a > 0$. Če je $a < 1$, je zaporedje a^n padajoče in navzdol omejeno. Torej je konvergentno in označimo njegovo limito z α. Ker se zaporedje a^{n+1} razlikuje od zaporedja a^n le v prvem členu, je tudi ima enako limito kot a^n. Sledi

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a\alpha,$$

od koder zaradi $a \neq 0$ sledi $\alpha = 0$. Če je $a = 1$, je očitno $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$. Če je $a > 1$ in je zaporedje a^n omejeno, je konvergentno. Označimo njegovo limito z β. Torej je $\beta \geq a > 1$. Sedaj podobno kot v primeru $0 < a < 1$ dokažemo, da je $\beta = a\beta$. Ker pa je $\beta > 1$ in $a > 1$, ta enačba ni smiselna. Če je $-1 < a < 0$, velja $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$, od koder izpeljemo, da je tudi $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Za $a \leq -1$ pa ima zaporedje neskončno členov na intervalu $(-\infty, -1]$ in neskončno členov na intervalu $[1, \infty)$, zato ni konvergentno.

Koreni Naj bo a pozitivno realno število in n naravno število. Koren $\sqrt[n]{a}$ je tisto število, katerega n-ta potenca je enaka a. Dokazati je možno, da velja naslednji izrek:

Izrek 15 *Za vsako pozitivno realno število x in naravno število n obstaja natanko eno pozitivno število y, da je $y^n = x$.* ■

Ker je korenjenje obratna operacija od potenciranja, velja

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{ab} \\ \sqrt[m]{a^n} &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \end{aligned}$$

Če je naravno število p deljivo z naravnim številom q, velja

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

To ugotovitev vzamemo za definicijo potence z racionalnim eksponentnom. Če je $r = \frac{p}{q}$ racionalno število, definiramo $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Prepričamo se lahko, da je definicija dobra, tj. če je $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, je tudi $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$.

Izrek 16 (Bernoullijeva neenakost) *Za vsako pozitivno število x in naravno število $n > 1$ velja*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali z indukcijo. Za $n = 2$ ni kaj dokazovati. V dokazu indukcijskega koraka pa privzemimo, da je $(1 + x)^n > 1 + nx$. Tedaj velja

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) > (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x,$$

saj je $nx^2 > 0$. ■

S pomočjo Bernoullijeve neenakosti lahko dokažemo naslednjo trditev.

Izrek 17 *Naj bo a pozitivno realno število. Potem je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dokaz. Za $a = 1$ ni kaj dokazovati. Če je $a > 1$, lahko pri fiksnem $n > 1$ zapišemo $a = 1 + nx$, kjer je $x = \frac{a-1}{n} > 0$. Tedaj po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > 1 + n\frac{a-1}{n} = a,$$

od koder sledi

$$1 + \frac{a-1}{n} > \sqrt[n]{a} > 1.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a-1}{n}) = 1$, iz gornje ocene sledi, da je tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Če pa je $0 < a < 1$, pišemo $b = \frac{1}{a}$ in po že dokazanem velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Torej je tudi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Izrek 18 *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako racionalno število q, $|q| < \delta$, velja $|a^q - 1| < \varepsilon$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, obstaja tak n_1, da je $|\sqrt[n_1]{a} - 1| < \varepsilon$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-1}} = 1$, obstaja tak n_2, da je $|\sqrt[n_2]{a^{-1}} - 1| < \varepsilon$. Postavimo $n = \max\{n_1, n_2\}$. Če je sedaj $0 \le q < \frac{1}{n}$, je $|a^q - 1| < |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Za $-\frac{1}{n} < q < 0$ pa ocenimo $|a^q - 1| < |\sqrt[n]{a^{-1}} - 1| < \varepsilon$. Torej lahko postavimo $\delta = \frac{1}{n}$. ∎

Vzemimo sedaj poljubno realno število r. Radi bi definirali a^r, če je a pozitivno realno število. Obstaja zaporedje (r_n) racionalnih števil, da je $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Pokažimo, da je zaporedje a^{r_n} Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za $r_m > r_n$ velja $a^{r_m} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)$. Ker je zaporedje r_n konvergentno, je omejeno in je zato tudi $|a^{r_n}| \le M$ za vse n. Po prejšnjem izreku obstaja $\delta > 0$, da je $|a^q - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$ za vse $|q| < \delta$. Ker je zaporedje r_n konvergentno, je Cauchyevo in obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|r_n - r_m| < \delta$ za $m, n \ge N$. Torej je

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = |a^{r_n}| \cdot |a^{r_m - r_n} - 1| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

za vse $m, n \ge N$. Zaporedje je zato Cauchyjevo in obstaja $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Dobljeno vrednost označimo z a^r.

Če imamo še eno zaporedje r'_n, za katero je $\lim_{n\to\infty} r'_n = r$, velja $\lim_{n\to\infty}(r'_n - r_n) = 0$ in zato $\lim_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} = 1$. Ker pa je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a^{r'_n}}{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}} = 1,$$

od tod sledi $\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Torej je vrednost a^r neodvisna od zaporedja racionalnih števil, ki konvergira k r.

Nazadnje omenimo, da veljajo vsa pravila za računanje s potencami, ki smo jih izpeljali za racionalne eksponente, tudi za realne eksponente.

Število e Oglejmo si zaporedji $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ in $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$. Dokazati je možno, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje b_n pa padajoče in navzdol omejeno. Torej sta obe zaporedji konvergentni. Iz zveze

$$b_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

pa sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

kar pomeni, da imata zaporedji a_n in b_n isto limito, ki jo označimo z e. Skratka

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Število e je iracionalno in velja $e \approx 2.7182$.

Dokazati je možno, da je

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

tudi, ko x teče po realnih številih. Če sedaj pišemo $h = \frac{1}{x}$, nam primera $x \to \infty$ in $x \to -\infty$ skupaj dasta

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

Zgled 26 *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

Rešitev. Ker je $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1-\frac{1}{n+2}$, lahko zapišemo $\frac{n+1}{n+2} = 1+h$, kjer je $h = -\frac{1}{n+2}$. Od tod sledi $n = -\frac{1}{h} - 2$ in

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{1}{h}-2} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{-\frac{1}{h}}\cdot(1+h)^{-2}\right) = \\ &= \frac{1}{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}}\cdot\frac{1}{\lim_{h\to 0}(1+h)^2} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Zgled 27 *Izračunaj* $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n\cdot(-\frac{1}{3})} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{-3n}\right)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Opomba. V računu smo uporabili, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-\frac{1}{3}} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{-\frac{1}{3}},$$

kjer je bilo a_n konvergentno zaporedje. Slednje bi lahko izpeljali iz izreka o produktu limit, vendar bomo v poglavju o zveznih funkcijah dokazali še močnejši izrek, ki ga tu navedimo brez dokaza:

Izrek 19 *Če je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *in* f *zvezna funkcija v točki* a*, je* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

Logaritem Vzemimo, da sta v enačbi $a^y = x$ števili a in x znani, y pa ne. Rešitev te enačbe zapišemo v obliki $y = \log_a x$ in preberemo *y je logaritem števila x z osnovo a.* Številu x pravimo *logaritmand*, število a pa *osnova logaritma*. Da se dokazati, da je za dani pozitivni števili a in x, $a \neq 1$, število y, ki zadošča enačbi $a^y = x$, enolično določeno. Iz definicije logaritma sledi, da je $\log_a 1 = 0$ in $\log_a a = 1$. Logaritem ni definiran, če je $a \leq 0$ ali $a = 1$. Če je $a > 1$, je funkcija $x \mapsto \log_a x$ naraščajoča in navzgor neomejena.

Iz pravil za računanje s potencami izpeljemo podobna pravila za računanje z logaritmi. Če v formulo $a^{U+V} = a^U a^V$ vstavimo $U = \log_a u$ in $V = \log_a v$, dobimo

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v.$$

Iz $a^{U-V} = \frac{a^U}{a^V}$ izpeljemo

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v.$$

Iz $(a^U)^V = a^{UV}$ pa s podobnim prijemom izpeljemo

$$\log_a u^v = v \log_a u.$$

Čeprav je lahko osnova logaritma katerokoli pozitivno realno število a, $a \neq 1$, najpogosteje uporabljamo logaritme z osnovo e ali 10. Logaritem z osnovo e imenujemo *naravni logaritem* in označimo $\log_e x = \ln x$. Logaritem z osnovo 10 imenujemo *desetiški ali Briggsov logaritem* in označimo $\log_{10} x = \log x$. V novejšem času se uporabljajo tudi logaritmi z osnovo 2, ki jih imenujemo *dvojiški logaritmi*.

Iz enakosti $a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x}$ z logaritmiranjem sledi $\log_a x \cdot \log_a a = \log_b x \cdot \log_a b$, od koder izpeljemo

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Posebej velja

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

in

$$\ln x = \log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log x}{\log e}.$$

2.2 Številske vrste

Naj bo $a_1, a_2, \ldots$ zaporedje realnih števil. Izraz $a_1+a_2+a_3+\cdots$ imenujemo *številska vrsta* (oznaka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$), števila $a_1, a_2, \ldots$ pa *členi* te vrste. Za vsak n definiramo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Število s_n imenujemo *n-ta delna vsota vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vrsta je *konvergentna*, če konvergira zaporedje delnih vsot. Če vrsta ni konvergentna, pravimo, da je *divergentna*. Limito zaporedja delnih vsot imenujemo *vsota vrste*.

Zgled 28 *Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} k$ s splošnim členom $a_k = k$ je divergentna, ker je zaporedje delnih vsot $s_n = a_1 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ neomejeno.*

Zgled 29 *Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ s splošnim členom $a_k = (-1)^k$ je divergentna, ker ima zaporedje delnih vsot*

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{če je } n \text{ liho število,} \\ 0, & \text{če je } n \text{ število,} \end{cases}$$

dve stekališči.

Zgled 30 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentna in izračunaj njeno vsoto.*

Rešitev. Ker je $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, lahko izraz za n-to delno vsoto zapišemo kot

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ker je $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, je vrsta konvergentna in ima vsoto 1.

Zgled 31 *Dokaži, da je vrsta* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \tfrac{1}{k})$ *divergentna.*

Splošni člen je $a_k = \ln(1 + \frac{1}{k})$. Izračunajmo delno vsoto:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \tfrac{1}{k}) = \\ &= \ln(1 + \tfrac{1}{1}) + \ln(1 + \tfrac{1}{2}) + \cdots + \ln(1 + \tfrac{1}{n}) = \\ &= \ln\left((1 + \tfrac{1}{1})(1 + \tfrac{1}{2})(1 + \tfrac{1}{3}) \cdots (1 + \tfrac{1}{n})\right) = \\ &= \ln\left(\tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdots \tfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Vrsta je divergentna, ker je zaporedje delnih vsot neomejeno. ■

Geometrijska vrsta je vrsta $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ s splošnim členom $a_k = a\,q^k$. Če je $q \neq 1$, velja

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a + a\,q + a\,q^2 + \cdots + a\,q^n = a\tfrac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Vemo, da za $|q| < 1$ zaporedje q^n konvergira k 0 in tedaj je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$.

Če je $q = 1$, je $s_n = \sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ in to zaporedje je neomejeno.

Torej geometrijska vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Tedaj velja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Zgled 32 *Izračunaj* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^{k-1}}$.

Najprej premaknimo sumacijski indeks: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{3^k}$. Torej je $a = 4$ in $q = \frac{1}{3}$. Sledi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6$.

Zgled 33 (Legenda o šahu) *Legenda pravi, da je kralj Šahram želel nagraditi modreca Sisa Ben Dahiro, ki ga je naučil šah. Modrec je bil skromen in mu je rekel, da naj mu da toliko žita, kot ga gre na šahovsko ploščo, če položi na prvo polje 1 zrno, na drugo 2 zrni, na tretje 4, ...*

Ali mu je kralj lahko izplačal želeno nagrado?

Na šahovnico bi bilo potrebno položiti

$$1 + 2 + \ldots + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$$

zrn žita. Če vzamemo, da zrno žita tehta 20 mg (tj. $2 \cdot 10^{-5}$ kg), bi vse žito skupaj tehtalo $3.6 \cdot 10^{14}$ kg oz. $3.6 \cdot 10^{11}$ ton. (Svetovna letna proizvodnja žita je $6 \cdot 10^8$ ton.)

Izrek 20 (Cauchyjev kriterij) *Vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja* $N \in \mathbb{N}$*, da za vsaka* $m > n \geq N$ *velja* $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$.

Dokaz. Po definiciji je vrsta konvergentna natanko tedaj, ko je konvergentno zaporedje delnih vsot. Zaporedje pa je konvergentno natanko tedaj, ko ustreza Cauchyjevemu pogoju: Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|s_m - s_n| < \varepsilon$ za vsaka $m, n \geq N$. Trditev je tako dokazana, saj je $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$. ■

Posledica 21 *Če je vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergentna, je* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dokaz. V Cauchyjevem pogoju pišemo $m = n + 1$ in dobimo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $|a_m| < \varepsilon$ za vsak $m \geq N$. To pa ravno pomeni, da je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. ■

Zgled 34 *Harmonična vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *je divergentna.*

Rešitev. Oglejmo si delne vsote:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Torej zaporedje delnih vsot ne ustreza Cauchyjevemu pogoju. ■

Opozorilo. Očitno je $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Videli pa smo, da je harmonična vrsta divergentna. Torej je pogoj $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ za konvergenco vrste potreben, a ni zadosten.

Izrek 22 (Primerjalni kriterij) *Če za vsak indeks k velja $|a_k| \leq b_k$ in je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna.*

Dokaz. Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentna, po Cauchyjevem kriteriju za dani $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $\sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$ za vse $m > n \geq N$. Torej je

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k < \varepsilon$$

in je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, saj ustreza Cauchyjevemu kriteriju. ■

Zgled 35 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin kx$ konvergentna za vsako realno število x.*

Rešitev. Ker za vsako realno število x velja $|\sin kx| \leq 1$, lahko ocenimo $|\frac{1}{2^k} \sin kx| \leq \frac{1}{2^k}$. Torej smo člene vrste $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin kx$ navzgor ocenili s členi konvergentne geometrijske vrste $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. ■

Pri primerjalnem kriteriju moramo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ primerjati s kakšno znano vrsto. Najpogosteje uporabljamo geometrijsko vrsto ali pa vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ za primerno realno število α.

Izrek 23 *Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ poljubno število. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.*

Za $\alpha = 1$ dobimo (divergentno) harmonično vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Ker za $\alpha < 1$ velja $\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$, je v tem primeru vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ divergentna. Dokaz konvergentnosti vrste za $\alpha > 1$ izpustimo.

Izrek 24 (Kvocientni oz. d'Alembertov kriterij) *Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ taka vrsta s pozitivnimi členi, za katero obstaja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ki jo označimo s q. Če je $q < 1$, je vrsta konvergentna. Če je $q > 1$, je vrsta divergentna.*

Dokaz. Oglejmo si najprej primer, ko je $q < 1$. Izberimo poljubno število r, $q < r < 1$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \geq N$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$. Torej je $a_{n+1} \leq ra_n$ za vsak $n \geq N$. Zapišimo

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq ra_N, \\ a_{N+2} &\leq ra_{N+1} \leq r^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq r^k a_N. \end{aligned}$$

Torej je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, saj lahko njene člene od N-tega dalje navzgor ocenimo s členi konvergentne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_N$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}}_{\text{končno členov}} + \underbrace{a_N + ra_N + r^2 a_N + \ldots}_{\text{konvergentna vrsta}}.$$

V drugem primeru pa naj bo $q > 1$. Izberimo poljubno število r, $1 < r < q$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \geq N$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$. Torej je $a_{n+1} \geq ra_n$ za vsak $n \geq N$ in podobno kot zgoraj velja

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\geq ra_N \geq a_N, \\ a_{N+2} &\geq ra_{N+1} \geq ra_N \geq a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\geq a_N. \end{aligned}$$

Sedaj pa vidimo, da pogoj $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ki mu zadošča vsaka konvergentna vrsta (posledica 21), ne more biti izpolnjen. ■

Zgled 36 *Za vsako realno število x je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergentna.*

Rešitev. Če je $x = 0$, je vrsta očitno konvergentna. Če pa je $x \neq 0$, pišimo $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Tedaj je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0,$$

kar zaradi $q < 1$ pomeni, da vrsta konvergira za vsak x.

Zgled 37 *Dokazali smo že, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentna. D'Alembertov kriterij tega ne ugotovi.*

Rešitev. Za $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Zgled 38 *Dokazali smo že, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergentna. D'Alembertov kriterij tega ne ugotovi.*

Rešitev. Za $a_n = \frac{1}{n}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Zgled 39 *Raziščí konvergenco vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

Rešitev. Za $a_n = \frac{n!}{n^n}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ker je $\frac{1}{e} < 1$, je vrsta konvergentna.

Zgled 40 *Raziščí konvergenco vrste* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^k)}$ *za* $a > 0$.

Za $a_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}}.$$

Ker je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = \begin{cases} a, & \text{če je } a < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{če je } a = 1, \\ 0, & a > 1, \end{cases}$$

je za vsak $a > 0$ gornja vrsta konvergentna. ■

Izrek 25 (Korenski oz. Cauchyjev kriterij) *Naj bo* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *taka vrsta s pozitivnimi členi, za katero obstaja* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, *ki jo označimo s* q. *Če je* $q < 1$, *je vrsta konvergentna. Če je* $q > 1$, *je vrsta divergentna.*

Dokaz. Oglejmo si najprej primer, ko je $q < 1$. Izberimo poljubno število r, $q < r < 1$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \geq N$ velja $\sqrt[n]{a_n} \leq r$. Torej je $a_n \leq r^n$ za vsak $n \geq N$. Torej je vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, saj je lahko navzgor ocenimo s konvergentno vrsto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}}_{\text{končno členov}} + \underbrace{r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \ldots}_{\text{konvergentna vrsta}}.$$

V drugem primeru pa naj bo $q > 1$. Izberimo poljubno število r, $1 < r < q$. Tedaj obstaja število N, da za vsak indeks $n \geq N$ velja $\sqrt[n]{a_n} \geq r$. Torej je $a_n \geq r^n$ za vsak $n \geq N$. Torej je vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentna, saj je lahko navzdol ocenimo z divergentno geometrijsko vrsto (tj. $r > 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}}_{\text{končno členov}} + \underbrace{r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \ldots}_{\text{divergentna vrsta}}.$$

Zgled 41 *Razišči konvergenco vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^k}$ *za* $a > 0$.

Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, velja

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{a} = \frac{1}{a}.$$

Torej je po korenskem kriteriju vrsta konvergentna za $\frac{1}{a} < 1$ (tj. $a > 1$) in divergentna za $\frac{1}{a} > 1$ (tj. $a < 1$).

Če je $a = 1$, korenski kriterij ne odloča o konvergenci. Divergenco vrste pa lahko v tem primeru uvidimo kar iz vrste same. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k$ namreč divergira. ■

Korenski kriterij za ugotavljanje konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uporabljamo najpogosteje tedaj, ko je izraz $\sqrt[n]{a_n}$ 'ugoden' za limitiranje. Korenski kriterij pa ni izboljšava kvocientnega, saj velja:

Izrek 26 *Naj bo* (a_n) *zaporedje s pozitivnimi členi. Če obstaja limita* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, obstaja tudi limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *in sta enaki.*

Torej nima smisla poskusiti s korenskim kriterijem, če smo pri kvocientnem kriteriju izračunali $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, saj bomo izračunali tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. ■

Alternirajoče vrste Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *alternirajoča*, če je $a_k a_{k+1} < 0$ za vsak k.

Izrek 27 (Leibnitzov kriterij) *Če v alternirajoči vrsti absolutne vrednosti členov padajo in konvergirajo k* 0*, je vrsta konvergentna.*

Dokaz. Naj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ustreza pogojem izreka. Označimo $b_k = |a_k|$. Privzeti smemo, da je $a_1 > 0$. Torej imamo vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$, kjer je $b_k \geq b_{k+1} > 0$ za vsak k in $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Ker je

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(b_{2n+1} - b_{2n+2})}_{\geq 0} \geq s_{2n},$$

je zaporedje $(s_{2n})_n$ sodih delnih vsot naraščajoče. Zaradi

$$s_{2n} = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{b_{2n}}_{\geq 0} \leq b_1,$$

je zaporedje navzgor omejeno. Torej je zaporedje sodih delnih vsot konvergentno. Označimo $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Ker je $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$ in je $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(s_{2n+1})_n$ lihih delnih vsot in $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$. Torej je konvergentno tudi zaporedje (s_n) in velja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. ■

Izrek 28 *Delna vsota s_n alternirajoče vrste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se od vsote vrste razlikuje za manj kot $|a_{n+1}|$.*

Oglejmo si dokaz Leibnitzovega izreka podrobneje. Če je $a_1 > 0$, smo dokazali, da je zaporedje sodih delnih vsot naraščajoče. Ker je konvergentno, je navzgor omejeno s svojo limito. Podobno dokažemo, da je zaporedje lihih delnih vsot padajoče. Ker je konvergentno, je navzdol omejeno s svojo limito. Sledi $s_{2n} < s < s_{2n+1}$, od koder izpeljemo $0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$. Podobno je $s_{2n+2} < s < s_{2n+1}$, od koder izpeljemo $s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2} < s - s_{2n+1} < 0$.

Torej za vsak indeks n velja, da je $|s - s_n| < |a_{n+1}|$.

Zgled 42 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konvergentna.*

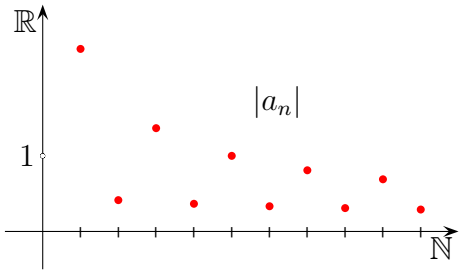
Rešitev. Označimo $a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Ker je $a_k \cdot a_{k+1} = -\frac{1}{k(k+1)} < 0$ in $|a_k| = \frac{1}{k+1} < |a_{k+1}| = \frac{1}{k+1}$, po Leibnitzovem kriteriju vrsta konvergira. ■

Zgled 43 *Dokaži, da je vrsta $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$ konvergentna. Koliko členov moramo sešteti, da bi izračunali vsoto vrste na $\frac{1}{100}$ natančno?*

Vrsta je konvergentna, saj je zaporedje $\frac{1}{\ln k}$ padajoče. Ker se napaka delne vsote razlikuje od vsote vrste za manj kot je absolutna vrednost prvega izpuščenega člena, moramo poiskati tak k, da je $\frac{1}{\ln k} < \frac{1}{100}$. Slednje je ekvivalentno s $k > e^{100} \approx 10^{43}$. Torej smo ugotovili, da vrsta sicer konvergira, a je konvergenca precej 'počasna'.

Zgled 44 *Ali je vrsta $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$ konvergentna?*

Leibnitzovega kriterija **ne smemo** uporabiti, saj absolutne vrednosti členov vrste konvergirajo k 0, vendar ne **monotono**. Za vsak $k \geq 2$ namreč velja $\frac{1}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}+1}$ in $\frac{1}{\sqrt{k}+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$. (Slednje je ekvivalentno z $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < 2$.)



Izračunajmo sode delne vsote gornje vrste:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \tfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{n}+1} = \\ &= \tfrac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \tfrac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots + \tfrac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \\ &= \tfrac{2}{2-1} + \tfrac{2}{3-1} + \cdots + \tfrac{2}{n-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Torej so sode delne vsote s_{2n} neomejeno podzaporedje v zaporedju delnih vsot.

Absolutna in pogojna konvergenca Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Če je vrsta konvergentna, a ni absolutno konvergentna, pravimo, da je *pogojno konvergentna*.

Zgled 45 *Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ je pogojno konvergentna, saj je harmonična vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergentna.*

Zgled 46 *Ali je vrsta $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$ konvergentna?*

Leibnitzovega kriterija **ne smemo** uporabitim, saj absolutne vrednosti členov vrste konvergirajo k 0, vendar ne **monotono**. Za vsak $k \geq 2$ namreč velja $\frac{1}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}+1}$ in $\frac{1}{\sqrt{k}+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$. (Slednje je ekvivalentno z $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < 2$.)

Izračunajmo sode delne vsote gornje vrste:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \tfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}-1} - \tfrac{1}{\sqrt{n}+1} = \\ &= \tfrac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \tfrac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots + \tfrac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \\ &= \tfrac{2}{2-1} + \tfrac{2}{3-1} + \cdots + \tfrac{2}{n-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Torej so sode delne vsote s_{2n} neomejeno podzaporedje v zaporedju delnih vsot.

Izrek 29 *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Oglejmo si vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ker je vrsta absolutno konvergentna (tj. vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je konvergentna), po Cauchyjevem kriteriju za $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N$ velja $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Ker zaradi trikotniške neenakosti velja še $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$, je tako $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$ in tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentna. ■

Ena najpomembnejših lastnosti absolutno konvergentnih vrst je, da se njena vsota ne spremeni, če seštejemo člene v drugačnem vrstnem redu.

Izrek 30 *Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutno konvergentna, je za vsako bijekcijo $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolutno konvergentna in velja $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.* ■

Pri vsaki pogojno konvergentni vrsti pa lahko s primerno spremembo vrstnega reda seštevanja členov kot vsoto vrste dobimo vsako realno število ali celo ∞ ali $-\infty$.

Izrek 31 *Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pogojno konvergentna, za vsak $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ obstaja taka bijekcija $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \alpha$.* ■

Operacije z vrstami

Izrek 32 *Če sta vrsti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *in* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergentni, konvergira tudi vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *in velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{7}$$

Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergentna, je za vsako realno število* c *konvergentna tudi vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ *in velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{8}$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja $N_1 \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N_1$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podobno po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ obstaja $N_2 \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N_2$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Če sedaj pišemo $N = \max\{N_1, N_2\}$, velja ocena

$$|\sum_{k=n+1}^{m}(a_k + b_k)| \leq |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| + |\sum_{k=n+1}^{m} b_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za vse $m > n \geq N$. Enakost (7) nazadnje sledi iz izreka o vsoti limit zaporedij (izrek 11 na str. 26):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.\end{aligned}$$

Druga trditev očitno drži, če je $c = 0$. Vzemimo sedaj $c \neq 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po Cauchyjevem kriteriju za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m > n \geq N$ velja $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Tedaj velja ocena

$$|\sum_{k=n+1}^{m} ca_k| = |c| \cdot |\sum_{k=n+1}^{m} ca_k| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Enakost (8) nazadnje sledi iz izreka o limiti produkta zaporedja s konstanto (posledica 12 na str. 27):

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3 Funkcije

3.1 Splošni pojem funkcije

Naj bosta X in Y množici. *Funkcija* ali *preslikava* $f\colon X \to Y$ je pravilo f, ki vsakemu elementu x množice X priredi natančno določen element $f(x)$ množice Y. Označimo

lahko tudi $x \mapsto f(x)$. Množico X imenujemo *definicijsko območje* ali *domena*, množico $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ pa *zaloga vrednosti* funkcije f. Definicijsko območje funkcije f označimo tudi z D_f, zalogo vrednosti pa z Z_f.

Graf funkcije $f\colon X \to Y$ je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\} \subset X \times Y.$$

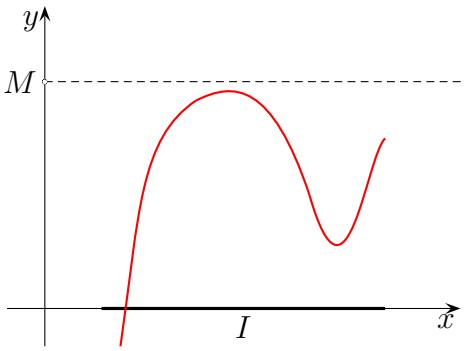
Funkcija f je tako določena, če je podano definicijsko območje D_f in funkcijski predpis, ki vsakemu $x \in D_f$ priredi natančno določen element $f(x)$. Funkcijski predpis podamo lahko s tabelo, besedilom, diagramom, ali pa, kot je v matematiki običajno, analitično. Analitično lahko podamo funkcijo

- eksplicitno; tj. v obliki $y = f(x)$
- implicitno; tj. v obliki $F(x, y) = 0$
- parametrično; tj. v obliki $x = g(t)$, $y = h(t)$

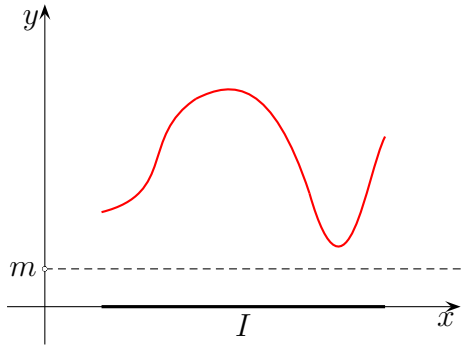
Če je funkcija podana eksplicitno, jo enostavno pretvorimo v implicitno ali parametrično obliko. Obratna pot ni vedno možna ali pa je računsko neizvedljiva.

Zgled 47 *Funkcijo $y = f(x)$ zapišemo implicitno kot $F(x, y) = y - f(x)$, parametrično pa kot $x = t$, $y = f(t)$.*

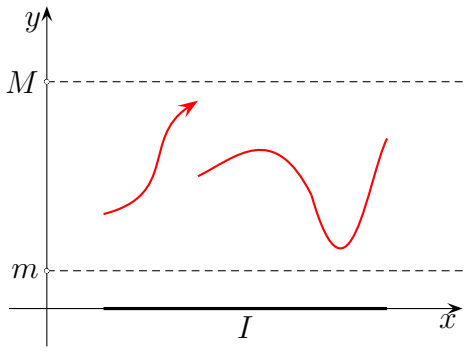
Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval in $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f je *navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in I$. Število M imenujemo *zgornja meja funkcije f*.



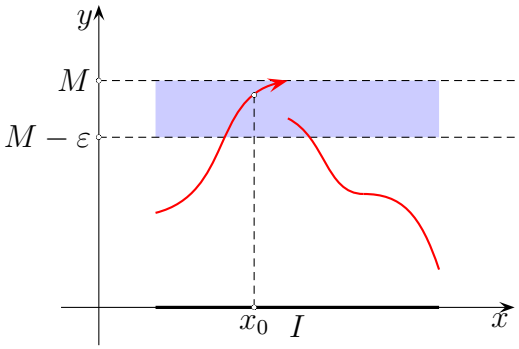
Funkcija f je *navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in I$. Število m imenujemo *spodnja meja funkcije f*.



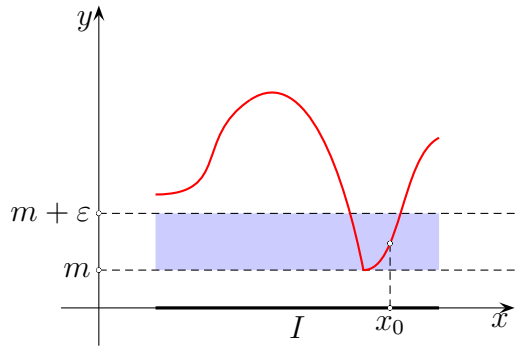
Funkcija f je *omejena*, če je navzgor in navzdol omejena. Torej obstajata $m, M \in \mathbb{R}$, da je $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in I$.



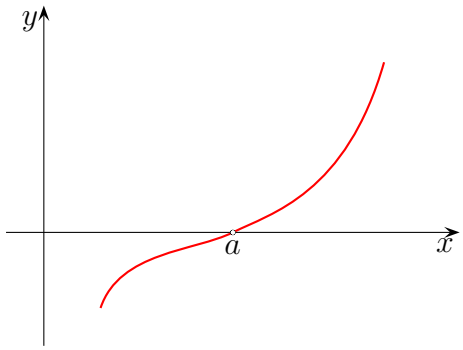
Natančna zgornja meja funkcije f je njena najmanjša zgornja meja: torej število $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in I$ in da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $x_0 \in I$, da je $f(x_0) > M - \varepsilon$. Pogosto označimo $M = \sup(f)$.



Natančna spodnja meja funkcije f je njena največja spodnja meja: torej število $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in I$ in da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $x_0 \in I$, da je $f(x_0) < m + \varepsilon$. Pogosto označimo $m = \inf(f)$.

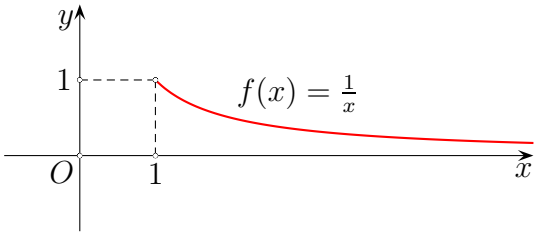


Ničla funkcije f je tako število a, da je $f(a) = 0$.



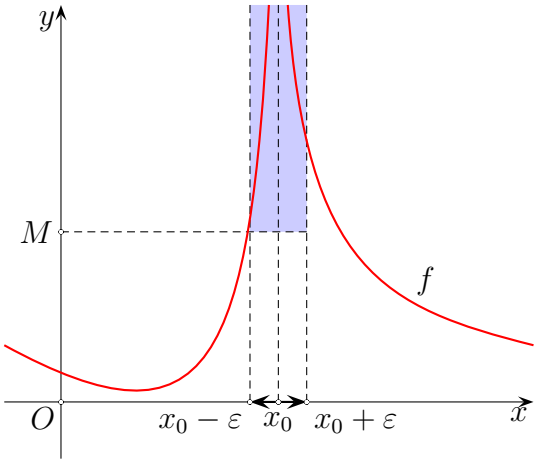
Ničla funkcije f je tako število a, da je $f(a) = 0$.

Zgled 48 *Obravnavaj omejenost funkcije* $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, *podane s predpisom* $f(x) = \frac{1}{x}$.



Funkcija f je omejena in velja $\sup(f) = 1$, $\inf(f) = 0$. Ker velja $f(1) = \sup(f)$, je $\sup(f) = \max(f)$. Ker pa je $f(x) > 0$ za vsak $x > 0$, ne obstaja točka x_0, v kateri je $f(x_0) = \inf(f)$ in zato ne obstaja minimum funkcije f.

Točka x_0 je *pol* funkcije f, če je v vsaki njeni okolici funkcija f neomejena; tj. če za vsak M obstaja $\varepsilon > 0$, da je $|f(x)| > M$ za vsak $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.



Zgled 49 *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, *ima pol v točki* $x_0 = -1$. *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

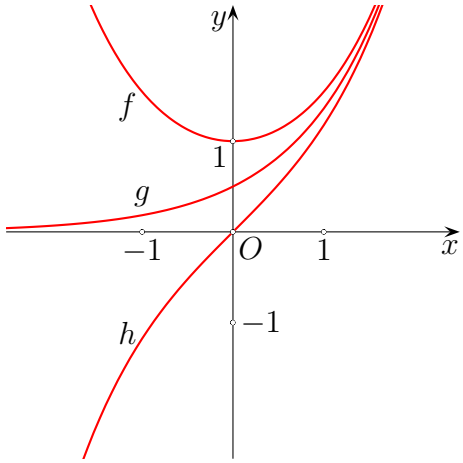
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{če je } x \neq -1, \\ 0, & \text{če je } x = -1 \end{cases}$$

ima pol v točki $x_0 = -1 \in D_f$.

Definicijsko območje funkcije f je *simetrično*, če je $x \in D_f$ natanko tedaj, ko je $-x \in D_f$. Funkcija f je *soda*, če ima simetrično definicijsko območje in velja $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Funkcija f je *liha*, če ima simetrično definicijsko območje in velja $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Enostavno je videti, da je

- Vsota, razlika, produkt in kvocient dveh sodih funkcij je soda funkcija.
- Vsota in razlika dveh lihih funkcij je liha funkcija, produkt in kvocient dveh lihih pa je soda funkcija.
- Produkt in kvocient sode in lihe funkcije je liha funkcija.

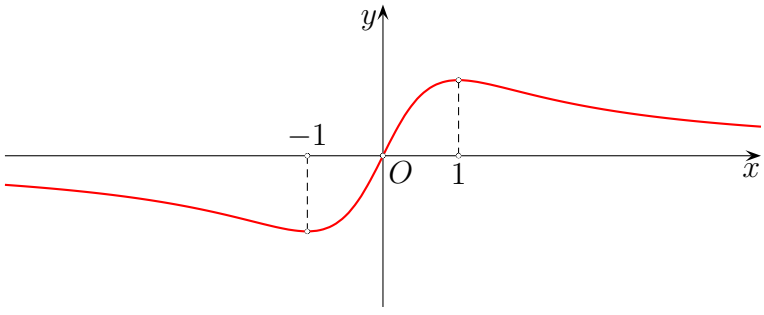
Zgled 50 *Funkcija* $x \overset{f}{\mapsto} \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *je soda,* $x \overset{h}{\mapsto} \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *liha,* $x \overset{g}{\mapsto} \frac{e^x}{2}$ *pa ni ne soda ne liha.*



Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *strogo naraščajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) < f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *padajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *strogo padajoča* na intervalu I, če je $f(x_1) > f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Zgled 51 *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *podana s predpisom* $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, *je na intervalu* $[-1, 1]$ *strogo naraščajoča, na intervalih* $(-\infty, -1]$, *in* $[1, \infty)$ *pa strogo padajoča.*



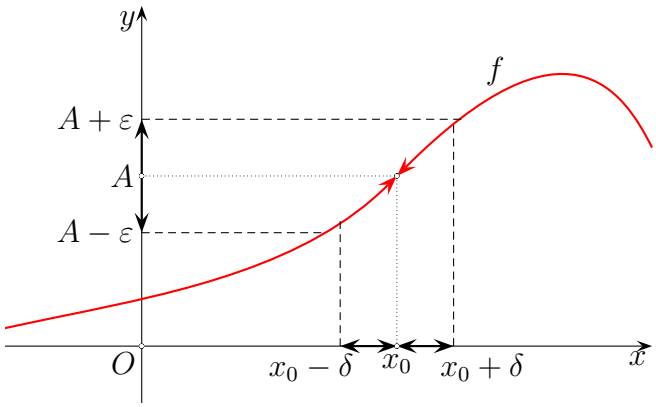
Polarni koordinatni sistem Naj bo $T(x, y)$ točka v ravnini, $(x, y) \neq (0, 0)$. Potem je T od koordinatnega izhodišča oddaljena za $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Označimo s T' pravokotno projekcijo točke T na abscisno os. Potem je $OT'T$ pravokotni trikotnik in velja $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$. Tu smo spotoma privzeli, da leži T v I. kvadrantu. S podobnim razmislekom ugotovimo, da zvezi $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$ veljata vedno, če s φ označimo pozitivno usmerjen kot med pozitivnim poltrakom abscisne osi in krajevnim vektorjem točke T. Paru (r, φ) rečemo *polarne* koordinate točke $T(x, y)$.

Inverzna funkcija Naj bo $f\colon X \to Y$ funkcija. Če obstaja taka funkcija $g\colon Y \to X$, da je $g \circ f = id_X$ in $f \circ g = id_Y$, pravimo, da je f *inverz funkcije* f in označimo $f^{-1} = g$. Spomimo se, da inverzna funkcija k dani funkciji f obstaja natanko tedaj, ko je f bijektivna.

Inverzno funkcijo grafično določimo tako, da narišemo graf funkcije f in ga prezrcalimo čez simetralo lihih kvadantov. Analitično pa določimo inverzno funkcijo tako, da enačbo $y = f(x)$ "rešimo" na x; torej tako, da iz enačbe $y = f(x)$ izrazimo $x = g(y)$.

3.2 Limita funkcije

Naj bo x_0 notranja točka intervala I in $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Število A je *limita* funkcije f v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 < |x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

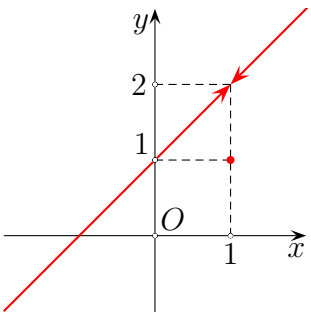


Zgled 52 *Dokaži, da je* $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

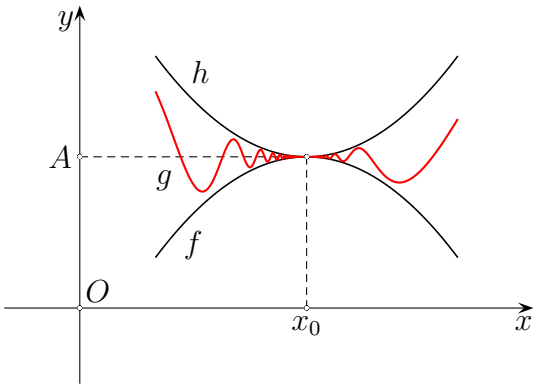
Dokaz. Označimo $f(x) = 2x+1$ in izberimo ε. Poiskati moramo tak δ, da je $|f(x)-3| < \varepsilon$ za $0 < |x - 1| < \delta$. Ker je $f(x) - 2 = 2(x - 1)$, bo za $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ veljalo $|2(x - 1)| < \varepsilon$. Torej za $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ velja: če je $0 < |x - 1| < \delta$, je $|f(x) - 3| < \varepsilon$. ■

Zgled 53 *Določi* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *za funkcijo* f, *podano z* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{če je } x \neq 1 \\ 1 & \text{če je } x = 1 \end{cases}$

Velja: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ in $f(1) = 1$.
Limita funkcije f v točki x_0 ni odvisna od funkcijske vrednosti v tej točki. V definiciji limite imamo namreč pogoj $0 < |x - x_0| < \delta$, kar pomeni, da se x točki x_0 sicer poljubno približuje, vendar te točke ne doseže. Še več, zaradi pogoja $|x - x_0| > 0$ tudi ni potrebno, da je funkcija f v točki x_0 sploh definirana.



Izrek 33 *Če je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ *in je* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *za vse* x *blizu* x_0 *(razen za* $x = x_0$*), obstaja tudi limita* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *in je enaka* A.



Dokaz. Naj obstaja $\delta_0 > 0$, da je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ za vse $0 < |x - x_0| < \delta_0$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja δ_1, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vse $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Obstaja tudi δ_2, da je $|h(x) - A| < \varepsilon$ za vse $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Označimo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Torej za vse $0 < |x - x_0| < \delta$ velja

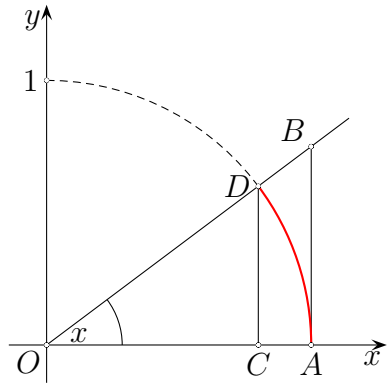
$$-\varepsilon < f(x) - A \leq g(x) - A \leq h(x) - A < \varepsilon,$$

kar nam da $|g(x) - A| < \varepsilon$. Torej je res $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$. ■

Zgled 54 *Dokaži, da je* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dokaz. S skice razberemo, da za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ velja ocena

$$|CD| = \sin x < x < \operatorname{tg} x = |AB|.$$

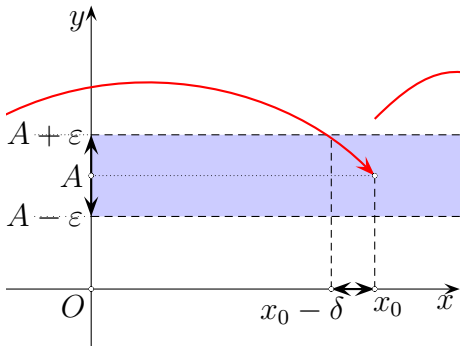


Torej je $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, kar lahko zapišemo tudi v obliki

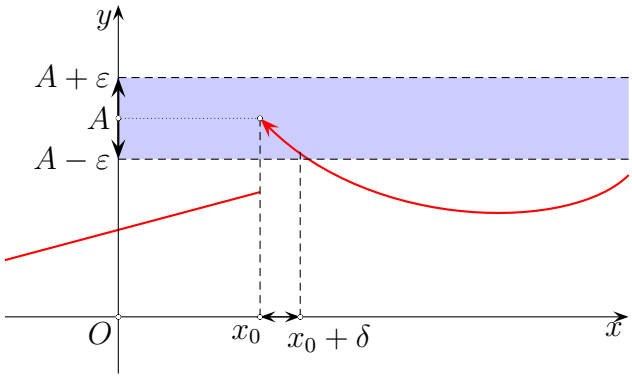
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ker je $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, po prejšnjem izreku sledi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

Leva in desna limita Število A je *leva limita* funkcije f v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 < x_0 - x < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = A$.



Število A je *desna limita* funkcije f v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 < x - x_0 < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Oznaka: $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = A$.

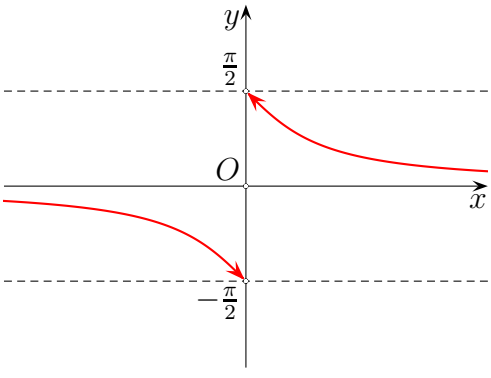


Neposredno iz definicije limite vidimo, da obstaja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ in $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ in sta enaki.

Zgled 55 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ *in* $\lim\limits_{x \uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. *Ali obstaja* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$?

Rešitev. Ko gre x k točki 0 z desne, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $+\infty$, zato je

$$\lim_{x \downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

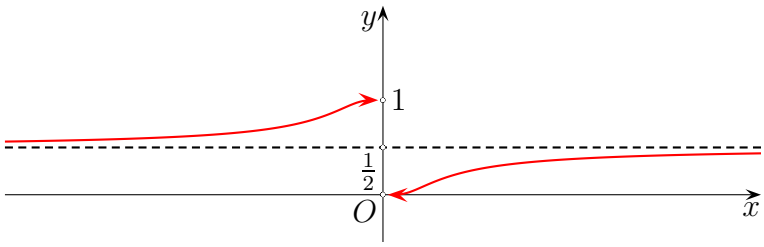


Ko gre x k točki 0 z leve, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $-\infty$, zato je

$$\lim_{x \uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

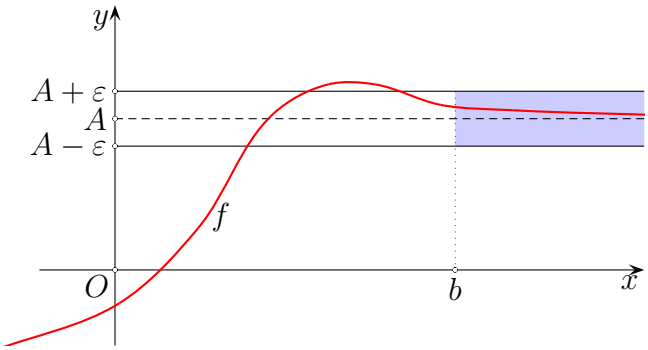
Limita $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ pa ne obstaja, saj je $\lim\limits_{x \downarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x \uparrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. ■

Zgled 56 *Ali obstaja* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$?



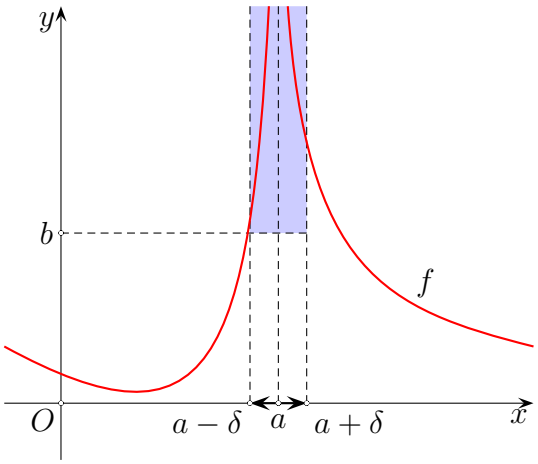
Funkcija $x \mapsto \frac{1}{x}$ ima pri $x = 0$ pol: $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ in $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$. Torej je $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ in $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = 1$ ter $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ne obstaja.

Limita v neskončnosti Število A je limita funkcije f v neskončnosti, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja b, da za vsak $x > b$ velja $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Podobno je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja b, da za vsak $x < b$ velja $|f(x) - A| < \varepsilon$.

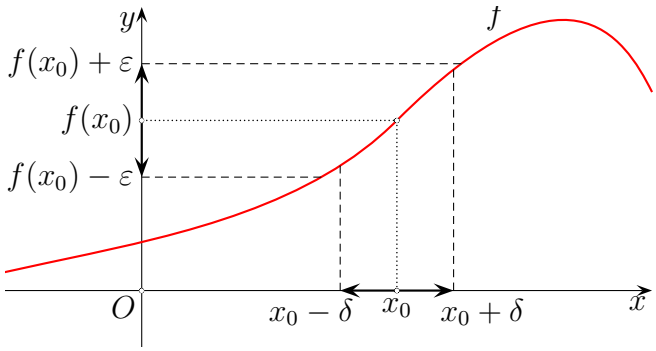
Neskončna limita Če za vsak b obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) > b$ za $0 < |x - a| < \delta$, pravimo, da gre vrednost funkcije f preko vsake meje, ko gre x proti a, in označimo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.



3.3 Zveznost

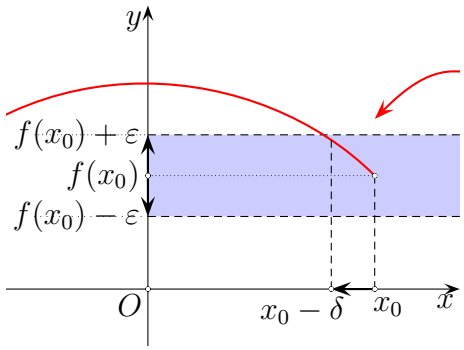
Naj bo x_0 poljubna točka intervala I in $f\colon I \to \mathbb{R}$ dana funkcija.

Funkcija f je *zvezna v točki* x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

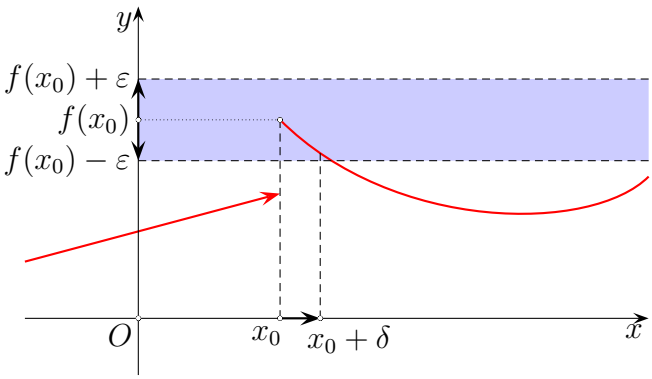


Pravimo, da je funkcija f *zvezna na intervalu* I, če je zvezna v vsaki njegovi točki.

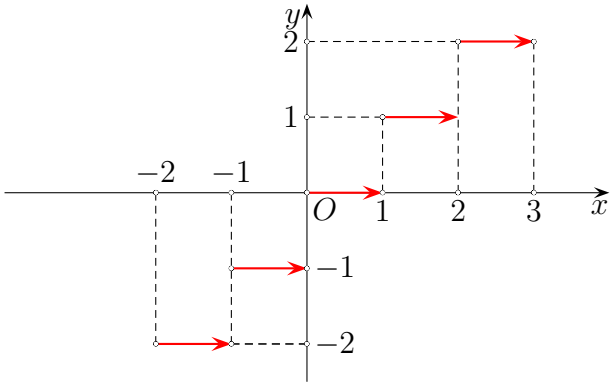
Funkcija je *zvezna z leve v točki* x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 \leq x_0 - x < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Funkcija je *zvezna z desne v točki* x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ iz $0 \leq x - x_0 < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



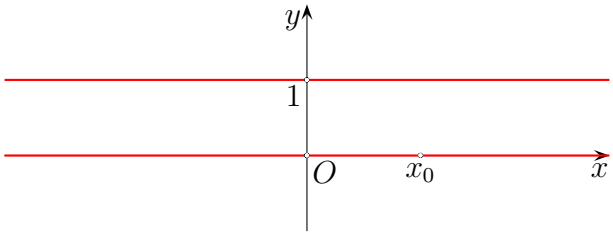
Funkcija celi del Za realno število x z $[x]$ označimo največje celo število, ki ne presega x. Torej je $[\pi] = 3$ in $[-\pi] = -4$.



Funkcija $x \mapsto [x]$ je v vseh celoštevilskih točkah zvezna z desne.

Množica točk, v katerih je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nezvezna, je lahko končna (ali celo prazna) ali neskočna (ali celo vsa realna števila).

Zgled 57 *Dirichletova funkcija* $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{če je } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{če je } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *je nezvezna v vsaki točki* $x \in \mathbb{R}$.



Pojem limite je v tesni zvezi s pojmom zveznosti:

Izrek 34 *Funkcija* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je v točki* $x_0 \in I$ *zvezna natanko tedaj, ko je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dokaz. Tu pravzaprav ni kaj dokazovati. V definiciji limite pišemo $f(x_0) = A$ in dobimo definicijo zveznosti. ■

Pogosto je funkcija f v okolici točke x_0 podana z več predpisi. Ker je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ natanko tedaj, ko obstajata limiti $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ in $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ in sta enaki A, lahko zveznost v točki x_0 dokažemo tudi s pomočjo leve in desne limite:

Izrek 35 *Funkcija* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *je v točki* $x_0 \in I$ *zvezna natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zgled 58 *Določi vrednosti konstant* a *in* b *tako, da bo funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{če je } x > 2 \\ 5 & \text{če je } x = 2 \\ bx - a & \text{če je } x < 2 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 2$.

Rešitev. Da bi bila funkcija zvezna v točki 2, mora veljati $\lim_{x\uparrow 2} f(x) = \lim_{x\downarrow 2} f(x) = f(2)$. Ker je $\lim_{x\uparrow 2} f(x) = 2b - a$, $\lim_{x\downarrow 2} f(x) = 2a + b$ in $f(2) = 5$, mora veljati

$$\begin{aligned} 2b - a &= 5 \\ 2a + b &= 5 \end{aligned}$$

Če enačbi odštejemo, dobimo $b - 3a = 0$, kar nam da $b = 3a$ in od tod z upoštevanjem druge enačbe izpeljemo $2a + 3a = 5$. Sledi $a = 1$ in $b = 3$. ■

Izrek 36 *Naj bosta $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkciji in naj obstajata limiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$ in $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Potem obstajata tudi limiti $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x))$ in $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ in velja*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\ \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \end{aligned}$$

Če je $g(x) \neq 0$ za vse x blizu x_0 in $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, obstaja tudi limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Dokaz. Označimo $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ in $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Torej za $0 < |x - x_0| < \delta$ velja

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Za dokaz druge trditve zapišimo

$$f(x)g(x) - AB = (f(x) - A)g(x) + A(g(x) - B). \tag{9}$$

Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Ker je $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, obstaja δ_3, da je $|g(x)| \leq |B| + 1$ za $0 < |x - x_0| < \delta_3$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Torej lahko za $0 < |x - x_0| < \delta$ v (9) ocenimo

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |(f(x) - A)g(x) + A(g(x) - B)| \leq \\ &\leq |(f(x) - A)g(x)| + |A(g(x) - B)| \\ &= |(f(x) - A)| \cdot |g(x)| + |A| \cdot |(g(x) - B)| \leq \\ &\leq |(f(x) - A)| \cdot |g(x)| + (|A| + 1) \cdot |(g(x) - B)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}(|B| + 1) + (|A| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Za dokaz tretje trditve pa zapišimo

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{f(x)B - g(x)A}{g(x)B} = \frac{(f(x) - A)B + A(B - g(x))}{Bg(x)}. \tag{10}$$

Izberimo $\varepsilon > 0$. Potem obstajata δ_1 in δ_2, da je $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{4}|B|$ za $0 < |x - x_0| < \delta_1$ in $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{4}\frac{B^2}{|A|+1}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Ker je $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$, obstaja δ_3, da je $|g(x)| \geq \frac{|B|}{2}$ za $0 < |x - x_0| < \delta_3$. Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Torej lahko za $0 < |x - x_0| < \delta$ v (10) ocenimo

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{f(x)B - g(x)A}{Bg(x)}\right| \leq \\ &\leq \frac{|f(x) - A| \cdot |B| + |A| \cdot |B - g(x)|}{|B| \cdot |g(x)|} \leq \\ &\leq \frac{\frac{\varepsilon}{4}|B| \cdot |B| + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{4}\frac{B^2}{|A|+1}}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|A|}{|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Posledica 37 *Če sta funkciji f in g zvezni v točki x_0, sta v tej točki zvezni tudi funkiji $x \mapsto (f(x)+g(x))$ in $x \mapsto (f(x)\cdot g(x))$. Če je $g(x_0) \neq 0$, je v točki x_0 zvezna tudi funkcija $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Kompozitum zveznih funkcij Dosedaj smo videli, da lahko iz zveznih funkcij s pomočjo osnovnih računskih operacij naredimo nove zvezne funkcije. Zvezne funkcije pa lahko tvorimo tudi s pomočjo kompozituma:

Izrek 38 *Če obstaja limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (označimo jo z A) in je funkcija g zvezna v točki A, obstaja tudi limita $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ in velja $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(A)$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je g zvezna v točki A, obstaja $\delta_1 > 0$, da je $|g(y) - g(A)| < \varepsilon$ za $|y - A| < \delta_1$. Ker je $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \delta_1$ za $0 < |x - x_0| < \delta$. Če pišemo $f(x) = y$, od tod sledi $|g(f(x)) - g(A)| = |g(y) - g(A)| < \varepsilon$. Torej za $0 < |x - x_0| < \delta$ velja $|g(f(x)) - g(A)| < \varepsilon$ in je res $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(A)$. ■

Posledica 39 *Če je funkcija f zvezna v točki x_0 in funkcija g zvezna v točki $f(x_0)$, je tudi funkcija $g \circ f$ zvezna v točki x_0.*

Zgled 59 *Izračunaj limiti $\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ za $x_0 = 2$ in $x_0 = 3$.*

Označimo $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$. Ker je $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, lahko za $x \neq 2$ ulomek okrajšmo v $\frac{x-3}{x-4}$. Ker je funkcija $x \mapsto \frac{x-3}{x-4}$ v točki $x = 2$ zvezna, tako velja

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-4} = \left.\frac{x-3}{x-4}\right|_{x=2} = \frac{2-3}{2-4} = \frac{1}{2}.$$

Izračun limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$$

pa ni problematičen, saj je funkcija $x \mapsto \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ v točki $x = 3$ zvezna in zato velja

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \left.\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\right|_{x=3} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Zgled 60 *Izračunaj* $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$.

Rešitev. Ko pomnožimo števec in imenovalec ulomka $\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$ z $\sqrt{x^2+3}+2$, dobimo

$$\frac{(\sqrt{x^2+3})^2-2^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x^2+3)-4}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2}.$$

Torej je

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{-2}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{2}.$$

Zgled 61 *Določi vrednosti konstant a in b tako, da bo funkcija f,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}}, & \text{če je } x \neq 0 \\ b, & \text{če je } x = 0 \end{cases}$$

zvezna povsod, kjer je definirana.

Rešitev. Ker je $1 + e^{1/x} \neq 0$ za vsak $x \neq 0$, je potrebno posebej obravnavati zveznost le v točki $x = 0$. Ko gre x k točki 0 z leve, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $-\infty$, zato je

$$\lim_{x\uparrow 0} e^{1/x} = 0.$$

Torej je

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{a^2e^{1/x}+a+2}{1+e^{1/x}} = \frac{a^2\cdot 0+a+2}{1+0} = a+2.$$

Ko gre x k točki 0 z desne, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ k $+\infty$, zato števec in imenovalec delimo z $e^{1/x}$. Dobimo

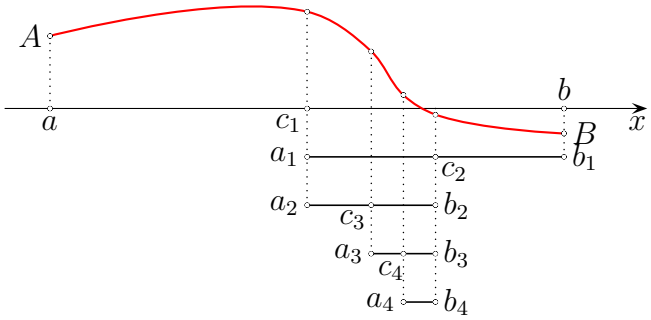
$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{a^2+ae^{-1/x}+2e^{-1/x}}{e^{-1/x}+1} = \frac{a^2+a\cdot 0+2\cdot 0}{0+1} = a^2.$$

Da bila funkcija f zvezna v točki 0, mora veljati $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = f(0)$, kar nam da pogoje $a + 2 = a^2 = b$, oz. $a = 2$ in $b = 4$ ali $a = -1$ in $b = 1$. ■

3.4 Lastnosti zveznih funkcij

Izrek 40 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in je $f(a)f(b) < 0$, ima funkcija f na tem intervalu vsaj eno ničlo.*

Dokaz. Privzeti smemo, da je $f(a) > 0 > f(b)$. Trditev je geometrično zalo nazorna, saj je graf zvezne funkcije nepretrgan. Ker leži točka $A(a, f(a))$ na zgornji polravnini, točka $B(b, f(b))$ pa na spodnji, mora graf funkcije f med točkama A in B vsaj enkrat sekati abscisno os.



Dokažimo sedaj trditev analitično. Razpolovimo interval $[a, b]$. Če v razpolovišču c_1 velja $f(c_1) = 0$, smo ničlo že našli, sicer pa na enem od podintervalov, označimo ga z $[a_1, b_1]$, velja

$$f(a_1) > 0 > f(b_1).$$

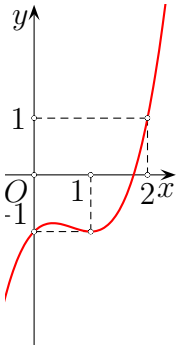
Razpolovimo interval $[a_1, b_1]$. Če v razpolovišču c_2 intervala $[a_1, b_1]$ velja $f(c_2) = 0$, smo tako točko že našli, sicer pa na enem od podintervalov, označimo ga z $[a_2, b_2]$, velja $f(a_2) > 0 > f(b_2)$. Postopek še ponavljamo ...

Tako dobimo naraščajoče zaporedje (a_n) levih krajišč in padajoče zaporedje (b_n) desnih krajišč. Obe zaporedji sta konvergentni in imata skupno limito x_0. Ker je f zvezna v točki x_0, velja $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$ in $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$. Ker je $f(x_0) \geq 0$ in $f(x_0) \leq 0$, od tod sledi $f(x_0) = 0$. ■

Opomba. Metodi iskanja ničle funkcije, ki smo jo uporabili v gornjem dokazu, pravimo *bisekcija* in je ena najenostavnejših numeričnih metod za iskanje ničel funkcij.

Zgled 62 *Poišči kakšno realno ničlo polinoma* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Ker je $f(1) = -1$ in $f(2) = 1$, leži ničla na intervalu $[1, 2]$.

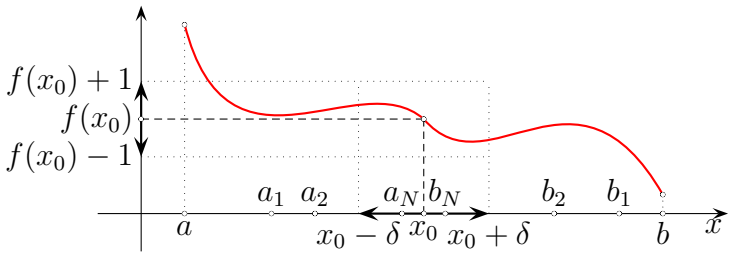


$[1, 2]$	$f(1.5) < 0$
$[1.5, 2]$	$f(1.75) < 0$
$[1.75, 2]$	$f(1.875) > 0$
$[1.75, 1.875]$	$f(1.8125) > 0$
$[1.75, 1.8125]$	$f(1.78125) > 0$
$[1.75, 1.78125]$	$f(1.765625) > 0$
$[1.75, 1.765625]$	$f(1.7578125) > 0$
$[1.75, 1.765625]$	$f(1.75390625) < 0$
$[1.75390625, 1.7578125]$	$x_0 \approx 1.755859375$

Izrek 41 *Če je* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, je na tem intervalu tudi omejena.*

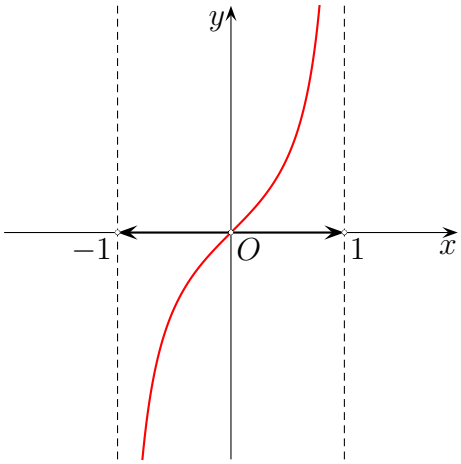
Dokaz. Recimo, da je funkcija f neomejena. Razpolovimo interval $[a, b]$. Potem je na vsaj enem dobljenih podintervalov, označimo ga z $[a_1, b_1]$, neomejena. Postopek ponovimo in dobimo, da je na vsaj enem od novih podintervalov, označimo ga z $[a_2, b_2]$, neomejena. Postopek ponavljamo ...

Tako dobimo naraščajoče zaporedje (a_n) levih krajišč in padajoče zaporedje (b_n) desnih krajišč. Obe zaporedji sta konvergentni in imata skupno limito x_0.

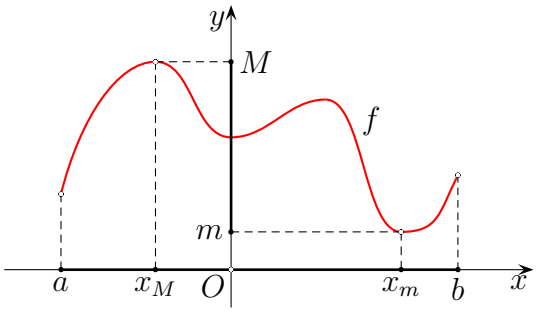


Ker je f zvezna v točki x_0, obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < 1$ za $|x - x_0| < \delta$. Ker $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, obstaja N, da leži interval $[a_N, b_N]$ znotraj $(x - \delta, x_0 + \delta)$. To pa ni možno, kar je po eni strani funkcija f na intervalu $[a_N, b_N]$ neomejena, po drugi strani pa za $x \in (x - \delta, x_0 + \delta)$ velja $f(x) \in (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1)$. ■

Opomba. Predpostavka, da je funkcija definirana na zaprtem intervalu, je bistvena. Zvezna funkcija $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, je na (odprtem) intervalu $(-1, 1)$ navzgor in navzdol neomejena.

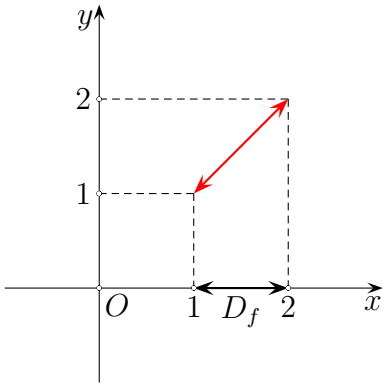


Izrek 42 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in m njena natančna spodnja meja, M pa njena natančna zgornja meja, obstajata točki x_m in x_M, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$.*



Dokaz. Recimo, da ne obstaja tako število x_m, da je $f(x_m) = m$. Torej je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a, b]$ in je funkcija g, $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$, na intervalu $[a, b]$ zvezna. Naj bo M' natančna zgornja meja za g. Tedaj je $\frac{1}{f(x)-m} \leq M'$, kar nam da $f(x) \geq m + \frac{1}{M'} > m$, zato m ni natančna spodnja meja za f. Privzetek, da je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a, b]$, je tako napačen. Podobno dokažemo tudi, da obstaja x_M, da je $f(x_M) = M$. ■

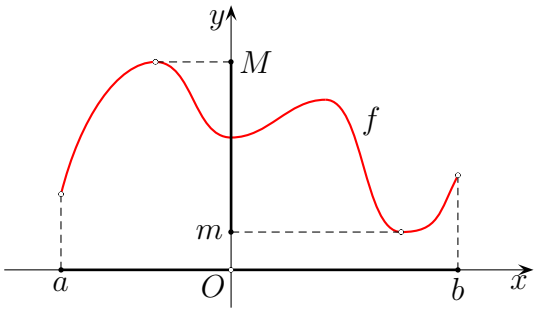
Opomba. Predpostavka, da je funkcija definirana na zaprtem intervalu, je bistvena. Zvezna funkcija $f\colon (1,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ima na odprtem intervalu $(1,2)$ natančno spodnjo mejo 1 in natančno zgornjo mejo 2, vendar teh dveh vrednosti ne zavzame.



Posledica 43 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in M njena natančna zgornja meja, m pa njena natančna spodnja meja, za vsak $y \in [m,M]$ obstaja točka $x \in [a,b]$, da je $f(x) = y$.*

Dokaz. Naj bo $y \in [m,M]$ poljubno število. Videli smo že, da obstajata x_m in x_M, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Privzemimo torej, da je $y \in (m,M)$. Oglejmo si funkcijo g, $g(x) = f(x) - y$, na intervalu $a' = \min\{x_m, x_M\}$ in $a' = \max\{x_m, x_M\}$. Potem je $g(a') \neq 0$, $g(b') \neq 0$ in $g(a')g(b') < 0$. Po izreku 40 obstaja $x \in (a',b')$, da je $g(x) = 0$, kar nam da $f(x) = y$. ■

Gornja dva izreka in posledico lahko skupaj na kratko povemo takole: Zvezna funkcija je na (končnem) zaprtem intervalu omejena in zavzame vse vrednosti na zaprtem intervalu (vključno s krajišči) med svojo največjo in najmanjšo vrednostjo.



Izrek 44 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo naraščajoča funkcija, obstaja inverzna funkcija $g\colon [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ k f in g je na intervalu $[f(a), f(b)]$ strogo naraščajoča in zvezna.*

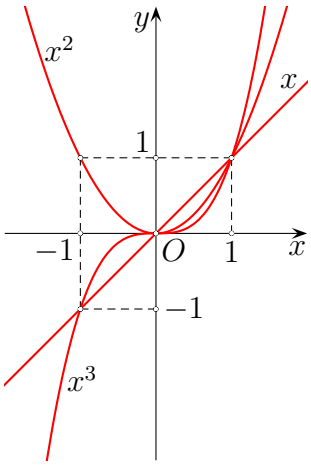
Dokaz. Po gornjem izreku za vsak $y \in [f(a), f(b)]$ obstaja x, da je $f(x) = y$. Ker je f strogo naraščajoča, je injektivna. Torej je $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektivna in obstaja inverz $g\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Ker je $f(x) < f(x')$ natanko tedaj, ko je $x < x'$, je $y < y'$ natanko tedaj, ko je $g(y) < g(y')$. Torej je tudi g strogo naraščajoča.

Dokažimo še, da je g zvezna. Vzemimo $\varepsilon > 0$. Potem moramo poiskati tak $\delta > 0$, da bo iz $|y - y_0| < \delta$ sledilo $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Torej iščemo tak $\delta > 0$, da iz $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ sledi $|x - x_0| < \varepsilon$. Označimo $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ in $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Tedaj zaradi monotonosti g velja: Če je $y_2 < y < y_1$, je $g(y_2) < g(y) < g(y_1)$ oz. $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Torej za $|y - y_0| < \delta$ res velja $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. ■

3.5 Zveznost elementarnih funkcij

3.6 Pregled elementarnih funkcij

Potence in polinomi Naj bo n naravno število. Funkcija, podana s predpisom $f(x) = x^n$, se imenuje *potenčna funkcija* ali na kratko *potenca*. Potenčna funkcija je definirana za vsak x in ima edino ničlo pri $x = 0$. Graf te funkcije imenujemo *parabola n-te stopnje*. Če je n sodo število, je f soda funkcija, sicer pa je f liha funkcija. Potenčna funkcija je definirana na vsej realni osi in je neomejena.



Naj bodo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realna števila. Izraz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ imenujemo *polinom*. Če je $a_n \neq 0$, je *stopnja* polinoma f enaka n. Polinomska funkcija je definirana na celi realni osi in nima polov.

Izrek 45 (Osnovni izrek algebre) *Vsak polinom stopnje vsaj 1 ima vsaj eno kompleksno ničlo.* ■

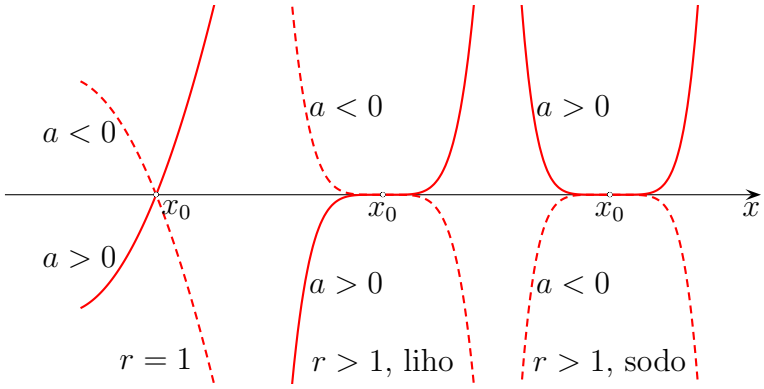
Od tod izpeljemo, da lahko polinom stopnje n zapišemo v obliki

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

kjer so $x_1, \ldots, x_n$ ničle polinoma f. Nadalje vidimo, da nastopajo kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti v konjugiranih parih, od koder sledi, da ima polinom lihe stopnje z realnimi koeficienti vsaj eno realno ničlo. Iskanje ničel polinomov je zapleteno: za polinome stopnje največ 4 obstajajo (bolj ali manj kompliciranе) formule. Za polinome stopnje 5 ali več pa je dokazano, da v splošnem takih formul ni.

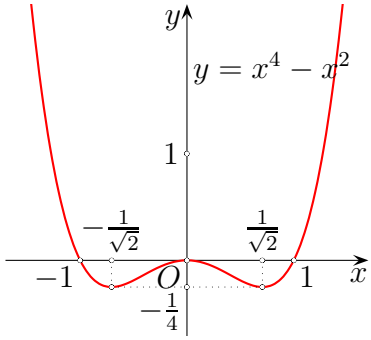
Ker sta konstantna funkcija $x \mapsto c$ in identična funkcija $x \mapsto x$ zvezni, z večkratno uporabo trditve 37 izpeljemo, da sta tudi polinomska funkcija in racionalna funkcija zvezni povsod, kjer sta definirani.

Lokalno obnašanje polinoma v okolici ničle Ker je $f(x) = (x - x_0)^r g(x)$ in $g(x_0) \neq 0$, se v okolici ničle polinom obnaša podobno kot potenčna funkcija $x \mapsto a(x - x_0)^r$, kjer je $a \neq 0$. Glede na število r ločimo 3 tipe ničel.



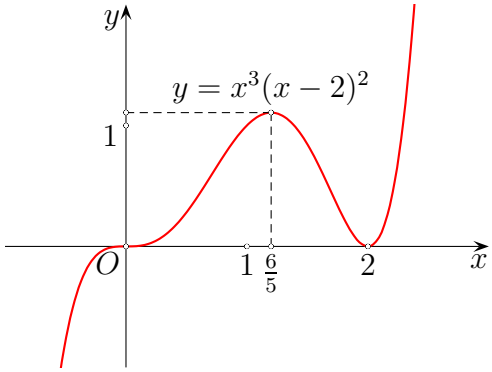
Zgled 63 *Skiciraj graf polinoma* $f(x) = x^4 - x^2$.

Ker je $f(x) = x^2(x-1)(x+1)$, ima polinom ničle v -1, 0 (reda 2) in 1.



Zgled 64 *Skiciraj graf polinoma* $f(x) = x^3(x-2)^2$.

Polinom ima ničlo tretjega reda v $x = 0$ in drugega v $x = 2$. Za velike x se obnaša podobno kot $x \mapsto x^5$.

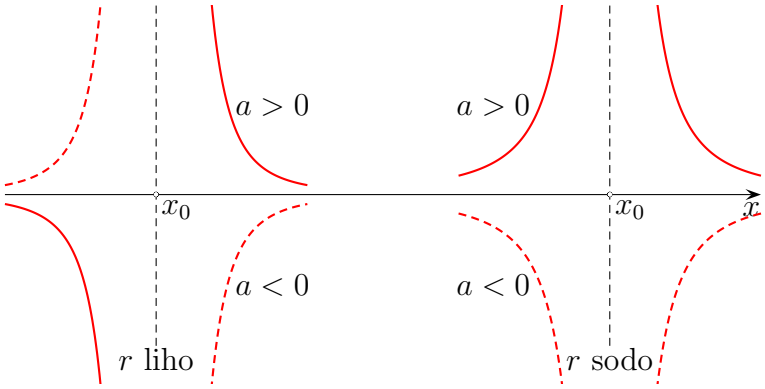


Racionalne funkcije Kvocient dveh polinomov

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

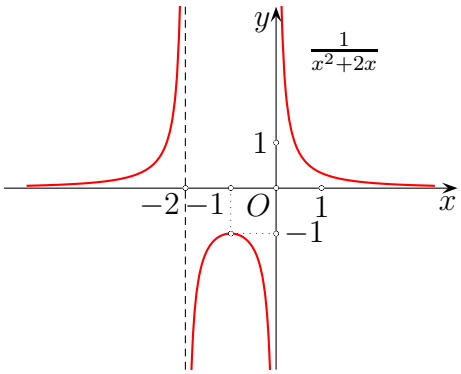
imenujemo *racionalna funkcija*. Če polinoma p in q nimata skupnih ničel, so ničle racionalne funkcije f ničle polinoma p, poli pa ničle funkcije q. Racionalna funkcija f je definirana povsod, razen v ničlah polinoma q. (Možno je, da q nima realnih ničel, tedaj je f definirana povsod. Npr. $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$.)

Lokalno obnašanje racionalne funkcije v okolici pola Naj bo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Recimo, da je x_0 ničla reda r polinoma q in da je $p(x_0) \neq 0$. Tedaj zapišemo $f(x) = \frac{p(x)}{(x-x_0)^r q_1(x)}$, kjer je $\frac{p(x_0)}{q_1(x_0)} \neq 0$. Torej je v bližini pola racionalna funkcija obnaša kot $x \mapsto a(x-x_0)^{-r}$, $a \neq 0$.



Zgled 65 *Skiciraj graf racionalne funkcije* $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$.

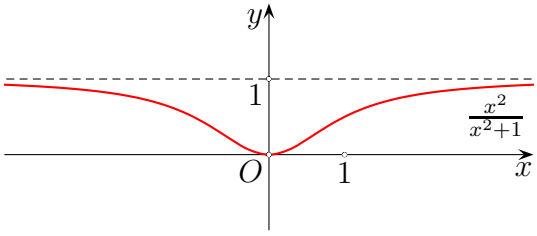
Ker je $x^2 + 2x = x(x+2)$, ima f pola prvega reda v $x = 0$ in $x = -2$.



Asimptota racionalne funkcije Naj bo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer stopnja polinoma p ni manjša od stopnje polinoma q. Potem lahko zapišemo $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, kjer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q, k pa neničelni polinom. Torej je $f(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$. Ker je $\lim_{|x|\to\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$, se za velike x racionalna funkcija obnaša tako kot polinom k. Pravimo, da je k *asimptota* racionalne funkcije f

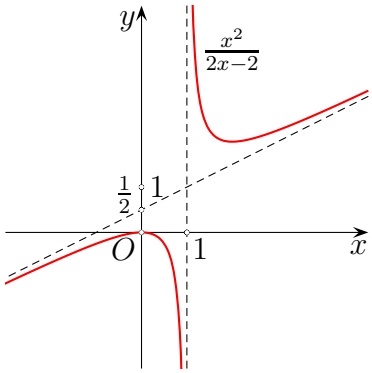
Zgled 66 *Skiciraj graf racionalne funkcije* $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Ker je $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, ima funkcija vodoravno asimptoto $y = 1$.



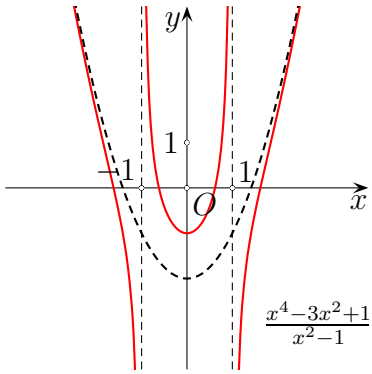
Zgled 67 *Skiciraj graf racionalne funkcije* $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.

Ker je $\frac{x^2}{2x-2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 12x - 2$, je polinom $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (linearna) asimptota funkcije f.



Zgled 68 *Skiciraj graf racionalne funkcije* $f(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-1}$.

Ker je $x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x^2 - 2) - 1$, je $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-1} = x^2 - 2 - \frac{1}{x^2+1}$ in je polinom $x \mapsto x^2 - 2$ asimptota funkcije f.



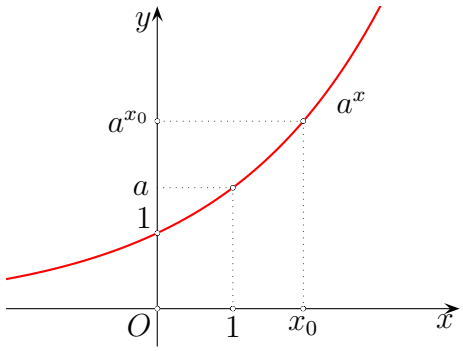
Algebraične funkcije *Algebraična funkcija* $y = y(x)$ je rešitev enačbe

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}y^{n-1} + \ldots + A_1(x)y + A_0(x) = 0,$$

kjer so $A_0, \ldots, A_n$ polinomi. Tako npr. za $n = 2$ in $A_2 = 1$, $A_1 = 0$ in $A_0(x) = -x$ dobimo enačbo $y^2 - x = 0$, kar nam da korensko funkcijo. V splošnem ima gornja enačba n rešitev, zato je algebraična funkcija večlična. Če se omejimo na realne funkcije, rešitev ne obstaja ali pa ni povsod definirana. Med algebraične funkcije spadajo vse *krivulje II. reda*:

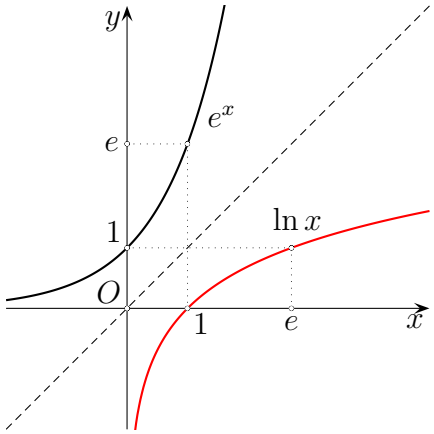
- elipsa; npr. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- hiperbola; npr. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ali $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$),
- parabola; npr. $y^2 = 2px$.

Eksponentna funkcija Funkcija, ki ni algebraična, se imenuje *transcendentna*. Med najpomembnejše take funkcije sodi eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$, kjer je $a > 0$ poljubno realno število. Za eksponentno funkcijo je značilen adicijski izrek $a^{x+y} = a^x a^y$. Najpogosteje uporabljamo eksponentno funkcijo z osnovo e, torej $x \mapsto e^x$. Eksponentna funkcija je povsod definirana in navzgor neomejena, če je $a \neq 1$.



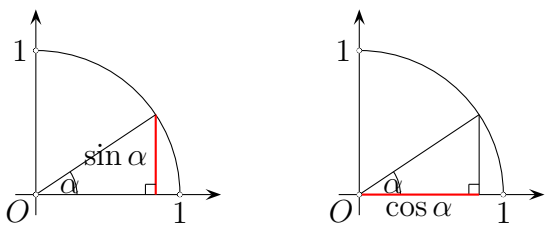
Označimo $f(x) = a^x$. Tedaj je $f(x) - f(x_0) = a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$. Ker je $\lim\limits_{x \to x_0} a^{x-x_0} = 1$, je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Torej je eksponentna funkcija zvezna.

Obrat eksponentne funkcije $x \mapsto e^x$ je *logaritemska funkcija* ln, ki je definirana s predpisom: $x = e^y$ natanko tedaj, ko je $y = \ln x$. Logaritemska funkcija je definrana na intervalu $(0, \infty)$ in je neomejena. Za logaritemsko funkcijo je značilna enakost $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

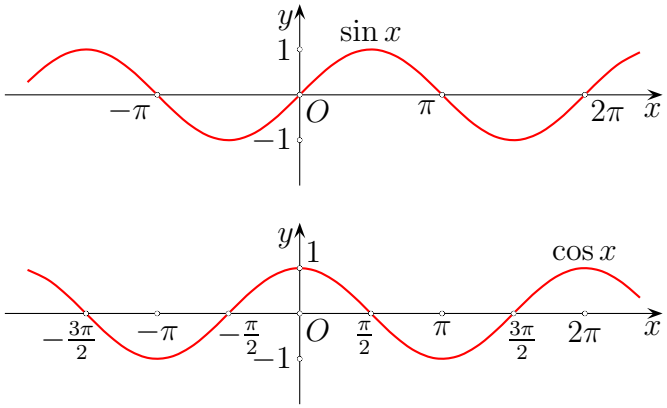


Logaritemska funkcija je po definiciji inverzna funkcije k zvezni eksponentni funkciji, zato je po izreku o inverzu zveznih funkcij (izrek 44) tudi zvezna.

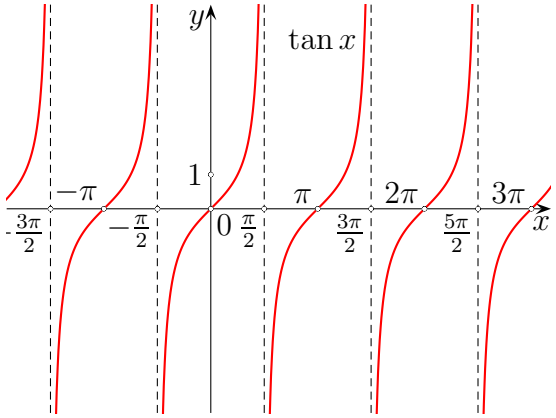
Kotne funkcije Kotne funkcije so sin, cos, tg, ctg in jih vpeljemo s pomočjo kotov v pravokotnem trikotniku. V pravokotnem trikotniku OAB s hipotenuzo OB naj velja $x = \angle AOB$. Definiramo $\sin x = \frac{|AB|}{|OB|}$, $\cos x = \frac{|OA|}{|OB|}$ in $\operatorname{tg} x = \frac{|AB|}{|OA|}$. Definicijo lahko pri funkcijah sin in cos razširimo na vsa realna števila.



Funkcija tg ima v točkah oblike $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pole in je zato definirana na množici $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$, Funkcija ctg pa ima pole v točkah oblike $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, in je definirana na množici $\mathbb{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$. Funkciji sin in cos sta periodični s periodo 2π, saj velja $\sin x=\sin(x+2\pi)$ in $\cos x=\cos(x+2\pi)$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.



Funkciji tg in ctg sta periodični s periodo π, saj velja $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$ in $\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg}(x+\pi)$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.



Med njimi veljajo zveze $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Kotne funkcije Dokažimo zveznost za funkcijo sin. Ker je

$$\sin x-\sin x_0=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2},$$

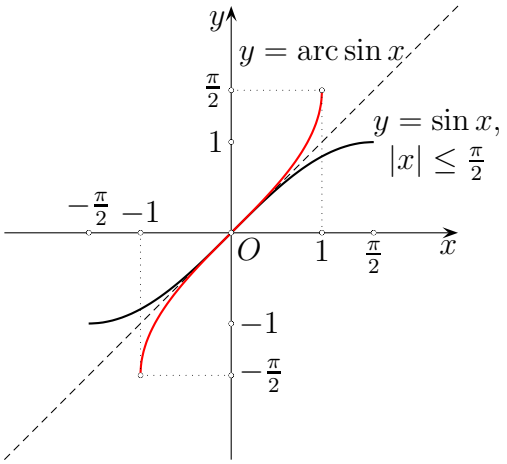
je

$$|\sin x-\sin x_0|=|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|2\cdot\frac{x-x_0}{2}|=|x-x_0|.$$

(V gornjem računu smo upoštevali, da za vsak t velja $|\sin t|\le|t|$.) Torej lahko v definiciji zveznosti pri danem $\varepsilon>0$ postavimo $\delta=\varepsilon$, in bo za $|x-x_0|<\delta$ veljalo $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

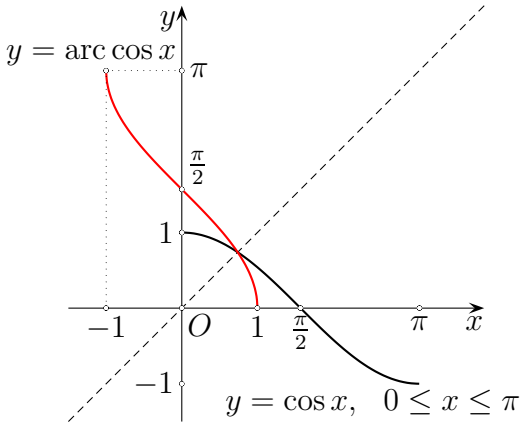
Ker je $\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, po izreku o kompozitumu zveznih funkcij (izrek 38) od tod sledi, da je zvezna tudi funkcija cos. Iz zveze $\operatorname{tg}(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ potem sledi, da je zvezna tudi funkcija tg povsod, kjer je definirana; torej na množici $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Ciklometrične funkcije *Ciklometrične* funkcije so inverzne funkcije h kotnim funkcijam. Funkcija $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni injektivna, zato inverz na celotni realni osi ne obstaja. Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pa je injektivna in zavzame vsako vrednost z intervala $[-1, 1]$ natanko enkrat. Inverz funkcije $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ torej obstaja in ga označimo z $\arcsin$. Torej za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $y \in [-1, 1]$ velja $x = \sin y$ natanko tedaj, ko je $y = \arcsin x$.

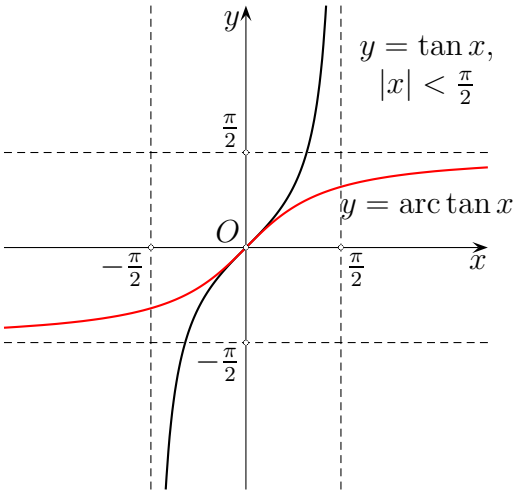


Ker je sin periodična funkcija, ima enačba $x = \sin y$, $x \in [-1, 1]$ neskončno rešitev: če je $y = \arcsin x$ rešitev, je za vsak $k \in \mathbb{Z}$ tudi $\arcsin x + 2k\pi$ rešitev. Zgoraj opisano funkcijo imenujemo zato *glavno vejo* funkcije $\arcsin$.

Podobno definiramo (glavno vejo) inverza funkcije cos, skrčene na interval $[0, \pi]$, tj. funkcije $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$. Inverz označimo z $\arccos$ in za $x \in [0, \pi]$ in $y \in [-1, 1]$ velja $x = \cos y$ natanko tedaj, ko je $y = \arccos x$.



Nazadnje vpeljemo še (glavno vejo) inverza funkcije $\operatorname{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, ki ga imenujemo $\operatorname{arc\,tg}$. Za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in $y \in \mathbb{R}$ velja $x = \operatorname{tg} y$ natanko tedaj, ko je $y = \operatorname{arc\,tg} x$.



Inverzne funkcije h kotnim funkcijam lahko določimo grafično tako, da ustrezne grafe prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov. Pomen glavne veje inverzne funkcije je iz slike tedaj lepo razviden.

Ciklometrične funkcije so po definiciji inverzne funkcije k zveznim kotnim funkcijam, zato so po izreku o inverzu zveznih funkcij (izrek 44) tudi zvezne.

3.7 Enakomerna zveznost

Spomnimo se, da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na intervalu zvezna, če za vsak $x_0 \in I$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ker izbiramo δ pri že izbranih x_0 in ε, je δ odvisen od x_0 (in ε). Torej od tod v splošnem ne sledi, da pri danem $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x_0 \in I$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zgled 69 *Naj bo $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Pri danem ε ne obstaja δ, da bi bil "dober" za vse x_0.*

Rešitev. Veljati mora

$$|f(x) - f(x_0)| = |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{a}| = \tfrac{|x-x_0|}{|x_0|\cdot|x|} = \tfrac{|x-x_0|}{x_0 x} < \varepsilon,$$

kar nam da $|x - x_0| < \varepsilon x_0 x$. Če bi obstajal tak $\delta < 1$, da bi iz $|x - x_0| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, mora biti $\delta < \varepsilon x_0 x < \varepsilon x_0(x_0 + 1)$. (Tu smo upoštevali, da zaradi $\delta < 1$ velja $x < x_0 + 1$.) Ker mora biti δ primeren za vse (poljubno majhne) x_0, iz $\delta < \varepsilon x_0(x_0+1)$ sledi, da bi moral biti $\delta = 0$. Takega δ torej ni.

Pravimo, da je funkcija f *enakomerno zvezna na intervalu I*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsaka $x, x' \in I$ iz $|x - x'| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Izrek 46 *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija f na tem intervalu enakomerno zvezna.*

Dokaz. Označimo $I = [a,b]$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi zveznosti za vsak $x' \in I$ obstaja $\delta_{x'}$, da je $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ za vsak $x \in I$, ki zadošča pogoju $|x - x'| < \delta_a$.

Privzemimo, da ne obstaja tak $\delta > 0$, da bi za vsaka $x, x' \in I$ iz $|x - x'| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Torej za $\delta = \frac{1}{k}$ obstajata točki $x'_k, x''_k \in I$, da je $|x'_k - x''_k| < \frac{1}{k}$ in $|f(x'_k) - f(x''_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Zaporedje (x'_k) je omejeno (leži na $[a,b]$), zato ima vsaj eno stekališče, recimo $x_0 \in I$. Ker je f zvezna v točki x_0, obstaja δ_0, da je $|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $|x-x_0| < \delta_0$.

Obstaja dovolj velik N, da je $\frac{2}{N} < \delta_0$. Ker je x_0 stekališče zaporedja (x'_k), obstaja $n \geq N$, da je $|x'_n - x_0| < \frac{1}{2}\delta_0$. Velja še $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{2}\delta_0$. Torej je

$$|x''_n - x_0| \leq |x''_n - x'_n| + |x'_n - x_0| < \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_0 = \delta_0.$$

Sledi $|f(x''_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ in od tod

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \leq |f(x''_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kar pa zaradi $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ ni možno. ■

4 Diferencialni račun

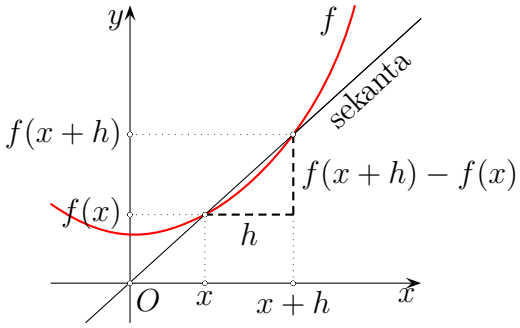
4.1 Odvod

Dana je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Zanima nas, kako hitro se funkcijska vrednost $f(x)$ spreminja v odvisnosti od x.

Izraz

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

imenujemo *diferenčni kvocient* in je enak naklonskemu koeficientu premice skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$.



Naj bo x notranja točka intervala I. Funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ je *odvedljiva* v točki x, če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Vrednost te limite označimo z $f'(x)$ in imenujemo *odvod funkcije f v točki x*. Pravimo, da je funkcija f *odvedljiva na intervalu I*, če je odvedljiva v vsaki točki na tem intervalu.

Definicijo lahko povemo tudi drugače. Število $f'(x)$ je odvod funkcije f v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Zgled 70 *Izračunaj odvod konstantne funkcije.*

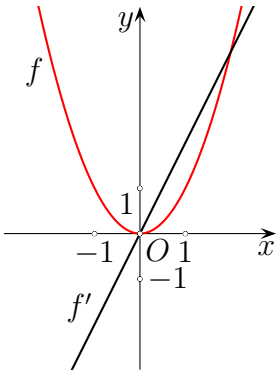
Če označimo $f(x) = c$, potem za vsak x velja

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Zgled 71 *Izračunaj odvod funkcije f, $f(x) = x^2$, v točki x.*

Rešitev. Računajmo

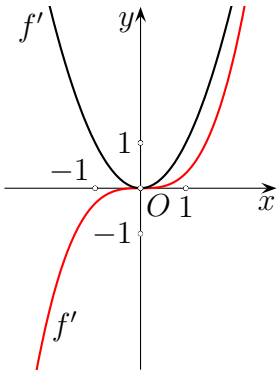
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$



Zgled 72 *Izračunaj odvod funkcije f, $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, v poljubni točki x.*

Računajmo

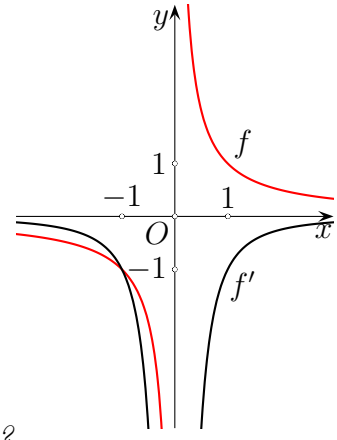
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{3h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{3h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3hx + h^2}{3} = x^2. \end{aligned}$$



Zgled 73 *Izračunaj odvod funkcije f, $f(x) = \frac{1}{x}$, v poljubni točki $x \neq 0$.*

Računajmo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$



Zgled 74 *Ali je funkcija f, $f(x) = |x|$, odvedljiva v točki $x = 0$?*

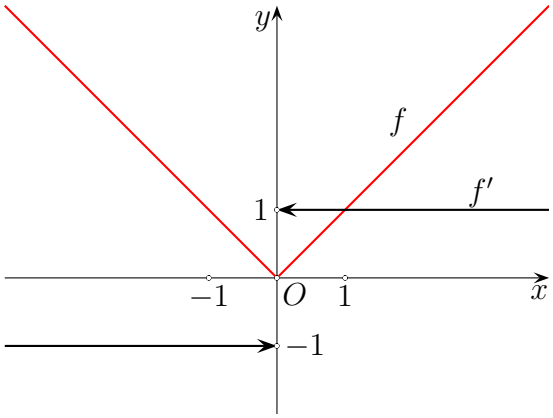
Rešitev. Ker je

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{-h}{h}=-1$$

in

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{h}{h}=1,$$

limita $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ne obstaja. Torej funkcija f ni odvedljiva v točki $x=0$. ■



V gornjem zgledu smo videli, da limita $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sicer ni obstajala, leva in desna limita pa sta. Torej je smiselno definirati: Če obstaja limita $\lim\limits_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pravimo, da je funkcija f *z leve odvedljiva* v točki x in označimo

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_L(x).$$

Če obstaja limita $\lim\limits_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pravimo, da je funkcija f *z desne odvedljiva* v točki x in označimo

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_D(x).$$

Kot kaže zgled 74, obstajajo funkcije, ki so v neki točki odvedljive z leve in z desne, vendar sta ta dva odvoda različna in zato funkcija v tej točki ni odvedljiva.

Neposredno iz definicije sledi, da je neka funkcija odvedljiva v točki x natanko tedaj, ko je v tej točki odvedljiva z leve in z desne in sta levi in desni odvod enaka.

Zgled 75 *Določi vrednosti parametrov a in b tako, da bo funkcija f,*

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{če je } x>1 \text{ in}\\ ax+b, & \text{če je } x\le 1,\end{cases}$$

odvedljiva v točki $x=1$.

Rešitev. Vrednosti parametrov a in b moramo izbrati tako, da bo obstajala limita $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Ker sta za funkcijo uporabljena dva predpisa, si bomo pomagali z levim in desnim odvodom v točki $x=1$. Izračunajmo najprej levi odvod:

$$f'_L(1)=\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{ah}{h}=a.$$

V izračunu desnega odvoda pa se zatakne:

$$f'_D(1) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{(1+h)^2-(a+b)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{(1-a-b)+2h+h^2}{h}.$$

Če naj gornja limita obstaja, mora biti $a+b=1$. Sledi

$$f'_D(1) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{(1-a-b)+2h+h^2}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\downarrow 0}(2+h) = 2.$$

Torej bo funkcija v točki $x=1$ odvedljiva, če bo $f'_L(1) = f'_D(1)$ oz. $a=2$. Skupaj s pogojem $a+b=1$ izračunamo še $b=-1$. ■

Čemu pogoj $a+b=1$ pri gornji nalogi? Ker je $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = a+b$ in $\lim_{x\downarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$, lahko pogoj $a+b=1$ zapišemo tudi v obliki

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} f(x) = f(1),$$

kar pomeni, da je funkcija f zvezna v točki 1. Slednje velja tudi v splošnem:

Izrek 47 *Če je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ v točki x odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.*

Dokaz. Spomnimo se, da je število $f'(x)$ odvod funkcije f v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| < \varepsilon|h|.$$

Slednje lahko preoblikujemo v

$$|f(x+h) - f(x)| < |h|(\varepsilon + |f'(x)|).$$

Torej velja $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, kar je ravno pogoj zveznosti v točki x. ■

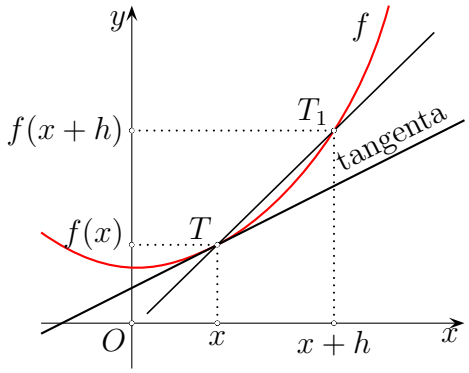
Kot kaže primer 74 (funkcija $x \mapsto |x|$), je lahko funkcija v neki točki zvezna, a ni odvedljiva. Obstajajo celo funkcije, ki so zvezne v vsaki točki nekega intervala, pa v nobeni točki niso odvedljive.

4.2 Geometrični pomen odvoda

Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Kot smo že videli, je diferenčni kvocient

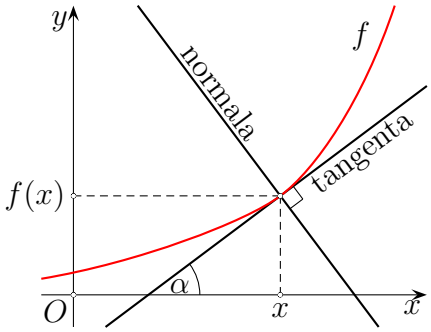
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

enak naklonskemu koeficientu premice skozi točki $T(x, f(x))$ in $T_1(x+h, f(x+h))$, ki jo imenujeno *sekanta*.



Ko se h približuje vrednosti 0, se točka T_1 približuje točki T. Če sekanta limitira proti neki končni legi, imenujemo sekanto v limitni legi *tangenta na krivuljo* v točki $(x, f(x))$. Smerni koeficient sekante preide v smerni koeficient tangente. Tangenta na graf funkcije f v točki $(x, f(x))$ oklepa s pozitivno smerjo abscisne osi kot α, ki zadošča zvezi

$$\tan\alpha = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Enačba tangente na graf funkcije f v točki x se glasi $Y - y = f'(x)(X - x)$, enačba normale (tj. pravokotnice na tangento) v tej točki pa $Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$, kjer smo označili $y = f(x)$.

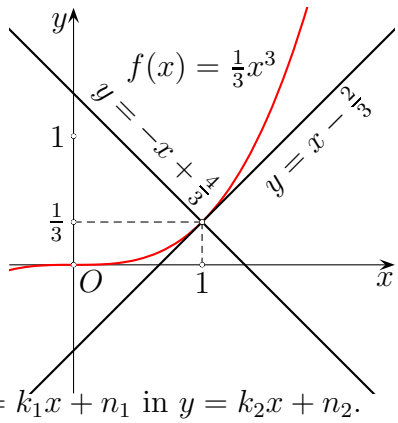
Zgled 76 *Zapiši enačbo tangente in normale na graf funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ v točki $x = 1$.*

Rešitev. Izračunali smo že $f'(x) = x^2$. Enačba tangente je $Y - \frac{1}{3}x^3 = x^2(X - x)$, kar nam za $x = 1$ da

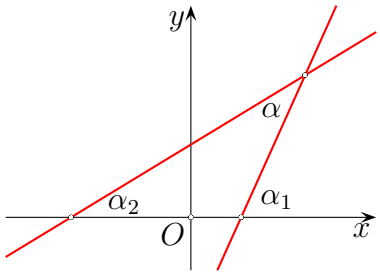
$$Y = \frac{1}{3} + (X - 1) = X - \frac{2}{3}.$$

Enačba normale je $Y - \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{x^2}(X - x)$, kar nam za $x = 1$ da

$$Y = \frac{1}{3} - (X - 1) = -X + \frac{4}{3}.$$



Kot med premicama Določimo kot med premicama $y = k_1x + n_1$ in $y = k_2x + n_2$.

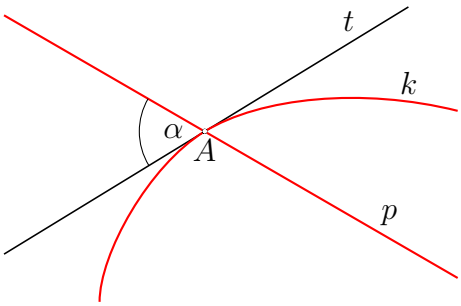


Iskani kot je enak $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, kjer je $k_1 = \tan\alpha_1$ in $k_2 = \tan\alpha_2$. Torej je

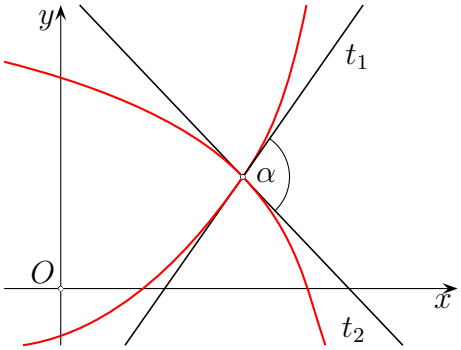
$$\tan\alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Od tod tudi vidimo, da je naklonski koficient normale $-\frac{1}{k}$, če je k naklonski koeficient tangente.

Kot med premico in krivuljo Kot med premico in krivuljo je po definiciji enak kotu med premico in tangento v presečni točki.



Kot med krivuljama Kot med krivuljama je po definiciji enak kotu med tangentama v presečni točki.

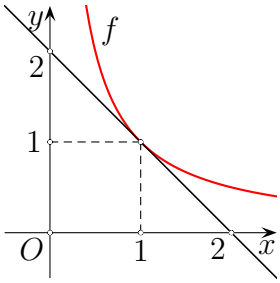


Zgled 77 *Poišči točko na grafu funkcije $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, v kateri tangenta seka abscisno os pod kotom $\frac{\pi}{4}$. V kateri točki ta tangenta seka ordinatno os?*

Rešitev. Tangenta ima enačbo $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$. Ker je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, velja

$$Y - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}(X - x),$$

od koder izrazimo $Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}(X - x)$. Ker mora v tangentni točki veljati $|f'(x)| = \frac{1}{x^2} = 1$, sledi $x = 1$. Enačba tangente je zato $Y = 1 - (X - 1) = 2 - X$. V točki, kjer tangenta seka ordinatno os, velja $X = 0$, zato je $Y = 2$. Tangenta seka ordinatno os v točki $(0, 2)$. ■



4.3 Pravila za odvajanje

Izrek 48 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f + g$ in velja $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

Dokaz. Računajmo

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

Posledica 49 *Če so funkcije f_1, f_2, ..., f_n odvedljive v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ in velja $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$.*

Dokaz. Dokažimo trditev z indukcijo. Za $n = 1$ ni kaj dokazovati. Za $n > 1$ pa lahko zapišemo

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n)' = (f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1})' + f_n' = (f_1' + f_2 + \ldots + f_{n-1}') + f_n',$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali indukcijsko predpostavko za 2 člena, v drugi pa indukcijsko predpostavko za $n - 1$ členov. ■

Izrek 50 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija fg in velja $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

Dokaz. Računajmo

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} = \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),
\end{aligned}$$

kjer smo zaradi zveznosti funkcije g zapisali $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. ■

Posledica 51 *Če so funkcije f_1, f_2, ..., f_n odvedljive v točki x, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f_1 f_2 \cdots f_n$ in velja*

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'.$$

Dokaz. Dokažimo trditev z indukcijo. Za $n = 1$ ni kaj dokazovati. Za $n > 1$ pa lahko zapišemo

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdots f_n)' &= (f_1 f_2 \cdots f_{n-1})' f_n + (f_1 f_2 \cdots f_{n-1}) f_n' = \\ &= f_1' f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'\end{aligned}$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali indukcijsko predpostavko za 2 faktorja, v drugi pa indukcijsko predpostavko za $n-1$ faktorjev. ■

Posledica 52 *Če je f odvedljiva funkcija v točki x in c poljubna konstanta, je v točki x odvedljiva tudi funkcija cf in velja $(cf)'(x) = cf'(x)$.*

Dokaz. V izreku 50 upoštevamo, da je odvod konstante v vsaki točki enak 0. ■

Izrek 53 *Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x in $g(x) \neq 0$, je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $\frac{f}{g}$ in velja $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

Dokaz. Računajmo

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\frac{f}{g})(x+h) - (\frac{f}{g})(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{hg(x)g(x+h)} = \\ &= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x)g(x+h)} = \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\end{aligned}$$

kjer smo zaradi zveznosti funkcije g zapisali $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. ■

Izrek 54 (Verižno pravilo) *Če je f odvedljiva funkcija v točki x in g odvedljiva funkcija v točki $f(x)$, je tudi funkcija $g \circ f$ odvedljiva v točki x in velja $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$.*

DOKAZ. Ker je g odvedljiva v točki $t = f(x)$, velja $\frac{g(t+k)-g(t)}{k} = g'(t) + \eta(k)$, kjer je $\lim_{k\to 0} \eta(k) = 0$. Torej je $g(t+k) - g(t) = kg'(t) + k\eta(k)$ za majhne k. Ker je f zvezna v točki x, bo za $k(h) = f(x+h) - f(x)$ veljalo $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Računajmo

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \frac{g(f(x)+k(h)) - g(f(x))}{h} = \\ &= \frac{g(f(x)+k(h)) - g(f(x))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} = \\ &= g'(f(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \eta(h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}g(f(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(g'(f(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \eta(h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) = \\ &= g'(f(x))f'(x).\end{aligned}$$

Posledica 55 *Če je g inverzna funkcija k f in $f'(x) \neq 0$, je g odvedljiva v točki $f(x)$, in velja $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.*

DOKAZ. Če je g inverzna funkcija k f, velja $g(f(x)) = x$. Torej je $g'(f(x))f'(x) = x' = 1$, od koder sledi $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Zgled 78 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$.*

Rešitev. Označimo $f(x) = x^2$. Potem je g, $g(x) = \sqrt{x}$, inverzna funkcija k f na intervalu $[0, \infty)$. Ker je $f'(x) = 2x$, po zgoraj dokazanem velja $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$ za vsak $x > 0$. Če sedaj pišemo $y = x^2$, izpeljemo $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Opomba. Če pišemo $y = f(x)$, lahko pravilo o odvodu inverzne funkcije zapišemo tudi kot $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

4.4 Odvodi elementarnih funkcij

Polinomi in racionalne funkcije Naj bo $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}h^i - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} (\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}h^{i-1}) = \\ &= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\,x^{n-1}.\end{aligned}$$

Če je $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, računamo

$$f'(x) = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m\,x^{-m-1}.$$

Torej je res $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Racionalne funkcije odvajamo po pravilu za odvajanje kvocienta dveh funkcij.

Zgled 79 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto (x^2+x+1)^9$.

Naj bo $f(x) = (x^2+x+1)$ in $g(x) = x^9$. Tedaj je $h(x) = g(f(x)) = (x^2+x+1)^9$. Ker je $f'(x) = 2x+1$ in $g(x) = 9x^8$, po verižnem pravilu sledi

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 9(x^2+x+1)^8 \cdot (2x+1).$$

Zgled 80 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

Označimo $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Tedaj je

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1(x^2+1) - x\,(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Eksponentna funkcija Označimo $f(x) = e^x$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Če postavimo $t = e^h - 1$, velja $\lim\limits_{h\to 0} e^h - 1 = 0$. Torej lahko zapišemo saj je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln e} = 1$, kjer smo upoštevali, da je $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$. Torej je $(e^x)' = e^x$.

Za splošno eksponentno funkcijo pa lahko zapišemo $a^x = e^{x\ln a}$. Če označimo $g(x) = e^x$ in $f(x) = x\ln a$, velja $a^x = e^{x\ln a} = g(f(x))$. Izračunajmo odvod po pravilu za odvod sestavljene funkcije 54: Ker je $g'(x) = (e^x)' = e^x$ in $f'(x) = (x\ln a)' = \ln a$, je

$$(a^x)' = g(f(x))' = g'(f(x))f'(x) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Zgled 81 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto x\,e^{-x}$.

Naj bo $f(x) = x\,e^{-x}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'\,e^{-x} + x\,(e^{-x})' = e^{-x} + x\,e^{-x}(-x)' = \\ &= e^{-x} + x\,e^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Zgled 82 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto x^2 + 2^x$.

Naj bo $f(x) = x^2 + 2^x$. Tedaj je

$$f'(x) = 2x + 2^x \ln 2.$$

Logaritemska funkcija Naj bo $f(x) = a^x$. Potem je funkcija g, $g(x) = \log_a x$, inverzna funkcija k f in velja $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a}$, kar lahko preoblikujemo v $(\log_a y)' = g'(y) = \frac{1}{y \ln a}$, ko postavimo $y = f(x) = a^x$. Posebej: $\ln x' = \frac{1}{x}$.

Zgled 83 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto x \ln x$.*

Naj bo $f(x) = x \ln x$. Tedaj je

$$f'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Zgled 84 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.*

Naj bo $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\ln x)' \cdot (1-\ln x) - (1+\ln x) \cdot (1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) - (1+\ln x)(-\frac{1}{x})}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1-\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Splošna potenčna funkcija Izračunali smo že odvod funkcije f, $f(x) = x^n$, kjer je eksponent n naravno število. Če pa je n poljubno realno število, pišemo $f(x) = e^{n \ln x}$, od koder sledi

$$f'(x) = e^{n \ln x}(n \ln x)' = e^{n \ln x}(n\frac{1}{x}) = nx^n\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Zgled 85 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto 2^{x^{\sqrt{2}}}$.*

Naj bo $f(x) = 2^{x^{\sqrt{2}}}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{x^{\sqrt{2}}} \cdot \ln 2 \cdot (x^{\sqrt{2}})' = 2^{x^{\sqrt{2}}}(\ln 2)(\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}) = \\ &= 2^{x^{\sqrt{2}}} x^{2\sqrt{2}-1}\sqrt{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Zgled 86 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto x^x$.*

Naj bo $f(x) = x^x$. Tedaj je $f(x) = e^{x \ln x}$. Torej lahko odvajamo po verižnem pravilu: $f'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Kotne funkcije Naj bo $f(x) = \sin x$. Računajmo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x, \end{aligned}$$

saj je $\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$. Ker je $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, je

$$(\cos x)' = \sin(\frac{\pi}{2} - x)' = \sin'(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x.$$

Iz $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pa izpeljemo še

$$\tan x' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ciklometrične funkcije Ker so te funkcije po definiciji inverzne h kotnim funkcijam, si pri izračunu odvodov pomagamo s pravilom 55. Računajmo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

saj je $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (pišemo $t = \arcsin x$ in upoštevamo, da je $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Podobno izpeljemo še

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

in

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{\tan^2(\arctan x)+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Zgled 87 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto x \arcsin(x)$.*

Naj bo $f(x) = x \arcsin(x)$. Tedaj je $f'(x) = \arcsin(x) + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Zgled 88 *Izračunaj odvod funkcije $x \mapsto \arctan(\frac{1}{x^2+1})$.*

Naj bo $f(x) = \arctan(\frac{1}{x^2+1})$. Tedaj je

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x^2+1})^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+2x+2} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{x^2+2x+2}.$$

Zberimo odvode elementarnih funkcij v eno preglednico:

$(c)' = 0, \quad c$ konstanta
$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

Zgled 89 *Izračunaj odvod funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' &= \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Do enakega rezultata pa pridemo nekoliko hitreje, če opazimo, da je

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

in od tod

$$\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1}.$$

Zgled 90 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto \ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Računajmo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' = \\
&= \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(x+\sqrt{1-x^2})'x - (x+\sqrt{1-x^2})x'}{x^2} = \\
&= \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}})x - (x+\sqrt{1-x^2})}{x^2} = \\
&= \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(\sqrt{1-x^2}-x)x - x\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x(x+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Zgled 91 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto \operatorname{arc\,tan} e^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

Računajmo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot (e^x)' + \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)' = \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)' = \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{1}{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}} \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - e^{2x}(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}} \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x+1}{1+e^{2x}}.
\end{aligned}$$

Zgled 92 *Izračunaj odvod funkcije* $x \mapsto 2\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2}$.

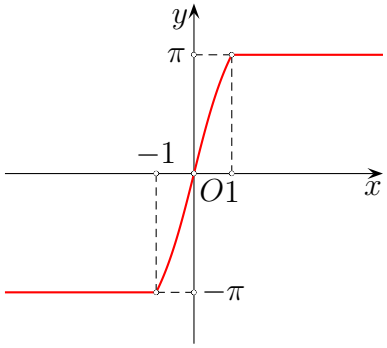
Računajmo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{|x^2-1|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{|x^2-1|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2},$$

kar med drugim pomeni, da v točkah $x = \pm 1$ funkcija ni odvedljiva. Če je $|x| < 1$, je $|x^2-1| = 1-x^2$, zato je $f'(x) = \frac{4}{1+x^2}$. Če je $|x| > 1$, je $|x^2-1| = x^2-1$, zato je $f'(x) = 0$.



4.5 Diferencial funkcije

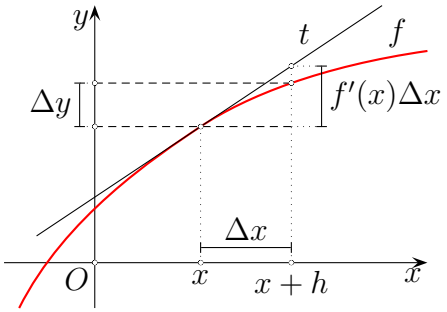
Naj bo f odvedljiva funkcija, $y = f(x)$. Spremembo vrednosti funkcije f pogosto označimo z Δy. Podobno označimo spremembo vrednosti spremenljivke x z Δx. S temi oznakami lahko zapišemo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Torej velja $f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \eta$, kjer gre pri $\Delta x \to 0$ tudi $\eta \to 0$. Gornjo enačbo preoblikujemo v

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x.$$

Kot smo že omenili, gre hkrati z Δx tudi η k 0, zato je $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.



Diferencial funkcije f v točki x je enak produktu iz odvoda funkcije in diferenciala neodvisne spremenljivke. Torej

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Za funkcijo $f\colon x \mapsto x$ je $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Torej je $dx = \Delta x$ in zato diferencial pogosto zapišemo v obliki $dy = f'(x)\,dx$ ali

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

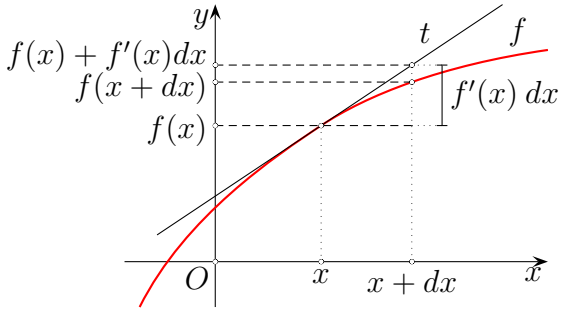
Če je y posredna funkcija spremenljivke x, tj. $y = f(u)$ in $u = g(x)$, je $dy = (f(g(x)))'\,dx = f'(u)g'(x)\,dx$. Ker je $f'(u) = \frac{dy}{du}$ in $g'(x) = \frac{du}{dx}$, lahko verižno pravilo za odvajanje zapišemo z diferenciali kot

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Diferenciale pogosto uporabljamo pri računanju približnih vrednosti funkcije, saj je $f(x+dx) = f(x) + \Delta y$. Torej je

$$f(x+dx) \approx f(x) + \Delta y = f(x) + f'(x)\,dx.$$

Grafično to pomeni, da smo v okolici dotikališča funkcijo aproksimirali s tangento.



Zgled 93 *Približno izračunaj* $\sqrt{17}$.

Ker je $17 = 16 + 1$, lahko zapišemo $\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}}$. Označimo $f(x) = 4\sqrt{1+x}$. Torej moramo približno izračunati $f(x+dx)$ za $x = 0$ in $dx = \frac{1}{16}$. Ker je $f'(x) = 4\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$, je

$$f(\tfrac{1}{16}) \approx f(0) + f'(0)\tfrac{1}{16} = 4 + 2 \cdot \tfrac{1}{16} = 4.125\,.$$

Dobljen rezulat je natančen na dve decimalni mesti, saj je $\sqrt{17} \approx 4.1231056\,.$ Omenjena metoda računanja približnih vrednosti funkcije je enostavna, žal pa iz metode same ni razvidno, kako natančen je dobljen rezultat. Kasneje si bomo pogledali, kako lahko s pomočjo Taylorjeve vrste ocenimo, kako velika je napaka, če nadomestimo $f(x+dx)$ z $f(x) + f'(x)\,dx$.

4.6 Višji odvodi

Naj bo funkcija f na intervalu (a, b) odvedljiva in $g = f'$ njen odvod. Če je funkcija g odvedljiva v točki x, pravimo, da je funkcija f *dvakrat odvedljiva* v točki x in označimo $f''(x) = g'(x)$. Funkcijo f'' imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Če je drugi odvod odvedljiva funkcija, označimo odvod drugega odvoda z f''' in imenujemo *tretji odvod* funkcije f. Splošno velja: če se da funkcija f n-krat zaporedoma odvajati, dobimo po n korakih n-ti odvod, ki ga označimo z $f^{(n)}$.

Višji odvodi elementarnih funkcij Za $f(x) = x^m$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}(x^m)' &= mx^{m-1}\\ (x^m)'' &= m(m-1)x^{m-2}\\ &\vdots\\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}.\end{aligned}$$

Če je m naravno število, bo $(m+1)$-vi in vsi višji odvod enak 0. (tj. $(x^m)^{(n)} = 0$ za $n \geq m+1$). Če pa je m negativno celo število ali $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pa noben odvod ne bo 0.
Za $f(x) = \sin x$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}),\\ (\sin x)'' &= -\sin x = \sin(x + 2\cdot\tfrac{\pi}{2}),\\ (\sin x)''' &= -\cos x = \sin(x + 3\cdot\tfrac{\pi}{2}),\\ (\sin x)^{(4)} &= \sin x = \sin(x + 4\cdot\tfrac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Torej za vsak k velja $(\sin x)^{(k)}(x) = \sin(x + k\cdot\frac{\pi}{2})$.
Za $f(x) = \cos x$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}),\\ (\cos x)'' &= -\cos x = \cos(x + 2\cdot\tfrac{\pi}{2}),\\ (\cos x)''' &= \sin x = \cos(x + 3\cdot\tfrac{\pi}{2}),\\ (\cos x)^{(4)} &= \cos x = \cos(x + 4\cdot\tfrac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Torej za vsak k velja $(\cos x)^{(k)}(x) = \cos(x + k\cdot\frac{\pi}{2})$.
Za $f(x) = \ln x$ po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \frac{1}{x} = x^{-1}\\ (\ln x)'' &= -x^{-2}\\ (\ln x)''' &= (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}\\ &\vdots\\ (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\end{aligned}$$

Za $f(x) = a^x$ pa je $f'(x) = a^x \ln a$, od koder v splošnem sledi $f^{(k)}(x) = a^x(\ln a)^k$.
Za višje odvode ciklometričnih funkcij pa v splošnem ne obstajajo lepe formule.

4.7 Lastnosti odvedljivih funkcij

Naj bo f odvedljiva funkcija v točki x_0. Iz

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

sledi, da lahko zapišemo $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\eta(h)$, kjer za funkcijo η velja $\lim_{h\to 0}\eta(h)=0$.

Naj bo sedaj $f'(x_0)\neq 0$. Potem je v enakosti

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h(f'(x_0)+\eta(h))$$

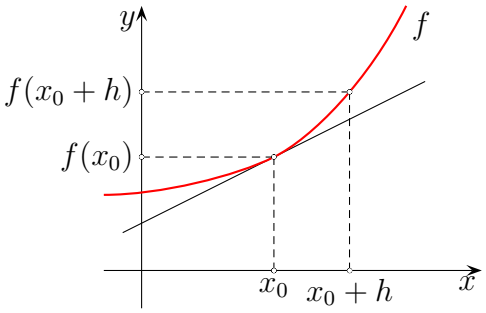
predznak vsote $f'(x_0)+\eta(h)$ določen s predznakom števila $f'(x_0)$ in se za majhne h ne spreminja. (Obstaja namreč tak $\delta>0$, da je $|f'(x_0)|>|\eta(h)|$ za vse $|h|<\delta$.)

Če je $f'(x_0)>0$, iz

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h(f'(x_0)+\eta(h))$$

sledi, da za majhne h velja

$$f(x_0+h)>f(x_0)\iff h>0.$$



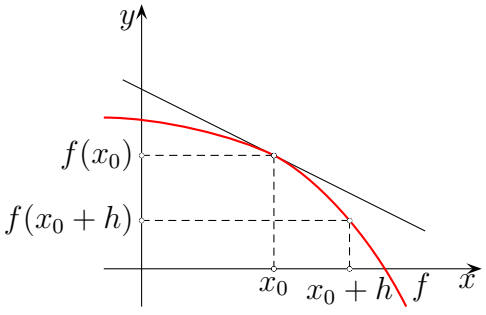
Opozorilo. To še ne pomeni, da je funkcija f v okolici točke x_0 naraščajoča.

Če je $f'(x_0)<0$, iz

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h(f'(x_0)+\eta(h))$$

sledi, da za majhne h velja

$$f(x_0+h)<f(x_0)\iff h>0.$$

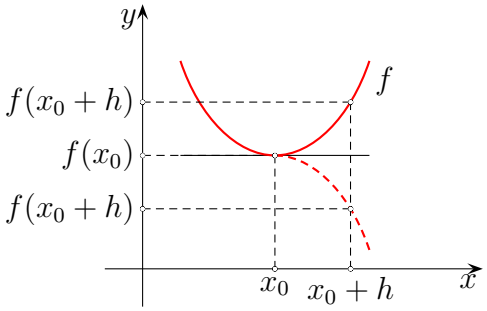


Opozorilo. To še ne pomeni, da je funkcija f v okolici točke x_0 padajoča.

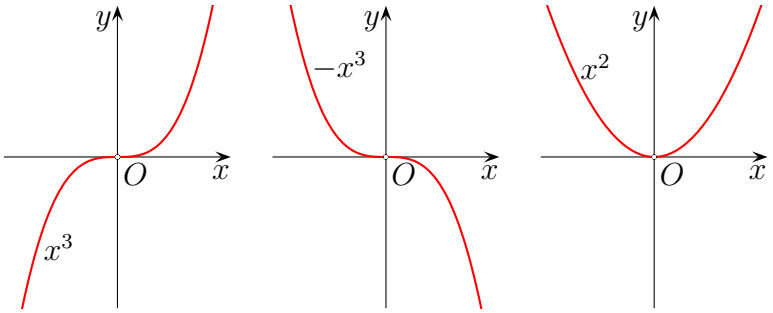
Če pa je $f'(x_0) = 0$, velja

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\eta(h)$$

in o obnašanju funkcije f v okolici točke x_0 ne moremo povedati ničesar.



Za funkcije $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -x^3$ in $x \mapsto x^2$ velja, da je njihov odvod v točki 0 enak 0. Prva funkcija je v okolici točke 0 naraščajoča, druga padajoča, tretja pa ni ne naraščajoča in ne padajoča.



Zgled 94 *Za funkcijo* f,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & \text{če je } x \neq 0 \text{ in} \\ 0, & \text{če je } x = 0, \end{cases}$$

je $f'(0) = 1$, *vendar v nobeni okolici točke* 0 *ni naraščajoča.*

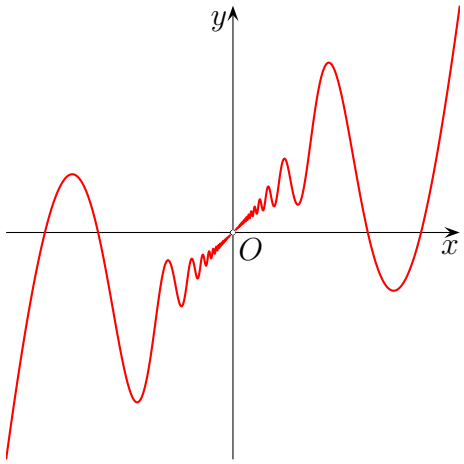
Dokaz. Res je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2 \sin \frac{\pi}{h}}{h} = \lim_{h\to 0}(1 + 2h \sin \frac{\pi}{h}) = 1.$$

Po drugi strani pa za $x \neq 0$ velja

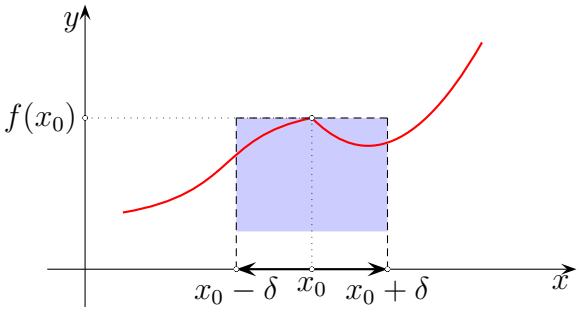
$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{\pi}{x} - 2\pi \cos \frac{\pi}{x}.$$

Če postavimo $a = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, bo $f'(a) = 1 + \frac{4}{2n} \cdot \sin(2\pi n) - 2\pi \cos(2\pi n) = 1 - 2\pi < 0$. Po gornjem razmisleku za točko b blizu a, $b < a$, velja $f(b) > f(a)$. Torej funkcija f na intervalu $[0, a]$ ni naraščajoča. ■

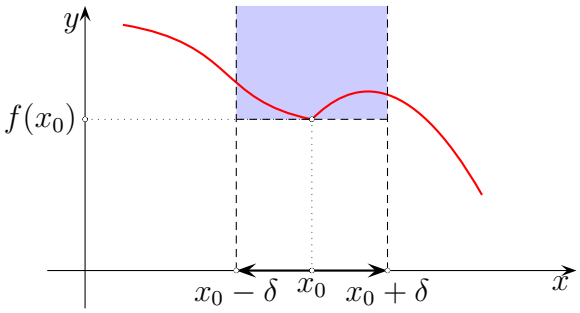


Naj bo I odprt interval in $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Točki $x \in I$, kjer je $f'(x) = 0$, pravimo *stacionarna točka funkcije* f. Vrednost funkcije se v okolici stacionarne točke počasi spreminja. Tangenta na graf funkcije v stacionarni točki je vzporedna z abscisno osjo.

Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ velja $f(x) < f(x_0)$.



Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ velja $f(x) > f(x_0)$.



Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum ali lokalni minimum, pravimo, da ima f v točki x_0 *lokalni ekstrem.*

Izrek 56 *Če ima odvedljiva funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Naj ima f v točki x_0 lokalni maksimum. Če ima lokalni minimum, dokažemo trditev podobno.

Naj bo torej $f(x_0+h) < f(x_0)$ za vse h blizu 0. Za $h<0$ torej velja

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

in zato

$$f'_L(x_0) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Za $h>0$ pa velja

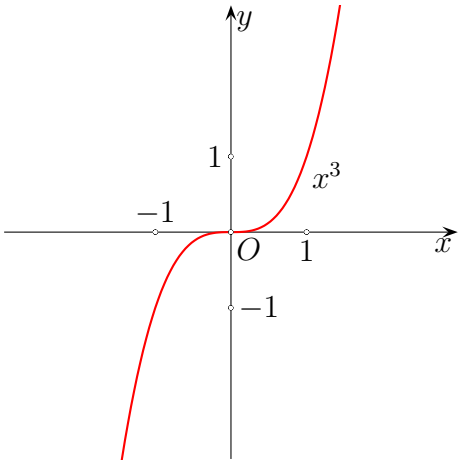
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < 0$$

in zato

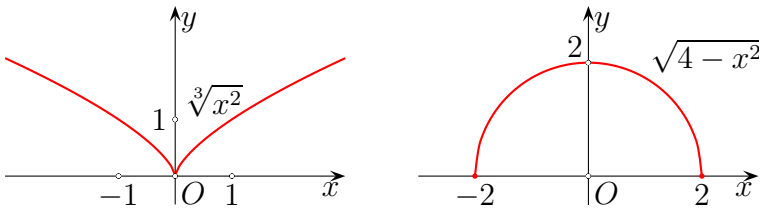
$$f'_D(x_0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Ker je $f'(x_0) = f'_L(x_0) \geq 0$ in $f'(x_0) = f'_D(x_0) \leq 0$, od tod sledi $f'(x_0) = 0$. ■

Odvedljiva funkcija ima lahko ekstreme le v stacionarnih točkah. Kot kaže funkcija $x \mapsto x^3$, pa obrat ne drži. Točka $x=0$ je stacionarna, vendar je v okolici te točke funkcija naraščajoča.



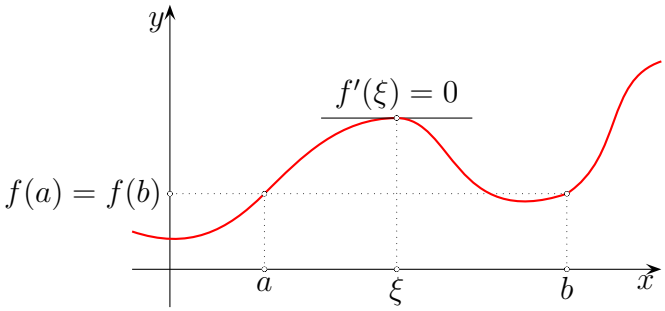
V gornjem izreku predpostavke o odvedljivosti ne smemo izpustiti. Funkcija $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ ima v točki $x=0$ lokalni minimum, a ni odvedljiva. Prav tako ima tudi funkcija $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ lokalna minima v točkah $x=\pm 2$, a sta ti dve točki na robu definicijskega območja in zato funkcija v teh dveh točkah ni odvedljiva.



Izrek 57 (Rolleov izrek) *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a,b) odvedljiva. Če je $f(a) = f(b)$, obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ker je f zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, zavzame maksimum M in minimum m. Če je $M = m$, je funkcija f konstantna, zato je $f'(\xi) = 0$ za vsak $\xi \in (a,b)$. Če pa je $m < M$, zaradi pogoja $f(a) = f(b)$ ne more zavzeti obeh ekstremnih vrednosti v krajiščih. Torej obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f(\xi) \in \{M,m\} \setminus \{f(a)\}$. V točki ξ je funkcija f odvedljiva in po izreku 56 je $f'(\xi) = 0$. ■

Geometrijski pomen Rolleovega izreka: Če imata krajišči grafa funkcije f na intervalu $[a,b]$ enaki ordinati, obstaja vsaj ena točka na grafu funkcije, v kateri je tangenta vzporedna z abscisno osjo.



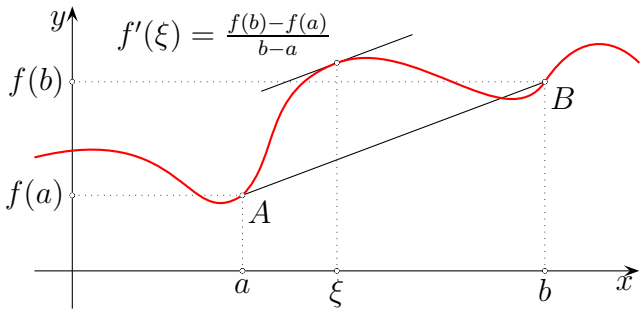
Izrek 58 (Lagrangeov izrek) *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a,b) odvedljiva. Potem obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dokaz. Funkcija $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

je intervalu $[a,b]$ zvezna in na intervalu (a,b) odvedljiva. Po konstrukciji je $g(a) = f(a)$ in $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$, zato ustreza pogojem Rolleovega izreka. Torej obstaja točka $\xi \in (a,b)$, da je $g'(\xi) = 0$. Sledi $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, kar nam da $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Tudi Lagrangeov izrek ima lep geometrijski pomen. Če je funkcija med točkama $A(a,f(a))$ in $B(b,f(b))$ gladka, obstaja vsaj ena točka na grafu, v kateri je tangenta vzporedna premici skozi točki A in B.



Zgled 95 *S pomočjo Lagrangeovega izreka dokaži, da za $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$ velja*

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}. \tag{11}$$

Rešitev. Ker je $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, opazujmo funkcijo f, podano s predpisom $f(x) = \tan x$. Po Lagrangeovem izreku obstaja točka ξ med a in b, da je $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ oz.

$$\tan b - \tan a = \frac{1}{\cos^2 \xi}(b-a).$$

Ker je funkcija cos na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ pozitivna in padajoča, je funkcija $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ naraščajoča, zato za $a < \xi < b$ velja

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 \xi} < \frac{1}{\cos^2 b}.$$

Ko slednje pomožimo z $b-a$, dobimo želeno neenakost (11). ■

Posledica 59 *Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ zvezna, na intervalu (a,b) odvedljiva in je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f konstantna.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (a,b)$. Po Lagrangeovem izreku za funkcijo f na intervalu $[a,x]$, obstaja $\xi \in (a,x)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ker je $f'(\xi) = 0$, je $f(x) = f(a)$. Zaradi zveznosti je $f(b) = \lim_{x \uparrow b} f(x) = f(a)$. Torej je res funkcija na intervalu $[a,b]$ konstantna. ■

Posledica 60 *Če sta funkciji f in g na intervalu $[a,b]$ zvezni, na intervalu (a,b) odvedljivi in je $f'(x) = g'(x)$ za vsak $x \in (a,b)$, obstaja konstanta c, da je $g(x) = f(x) + c$ za vsak $x \in [a,b]$.*

Dokaz. Funkcija $h = g - f$ ustreza pogojem prejšnje trditve, zato je $g - f$ konstanta, recimo c. Torej je $g(x) - f(x) = c$ oz. $g(x) = f(x) + c$ za vsak $x \in [a,b]$. ■

Gornjo trditev lahko enostavno povemo tudi takole: če imata funkciji enaka odvoda, se razlikujeta le za konstanto. Pri uporabi gornje trditve pa je potrebno paziti, da sta funkciji res definirani na **intervalih**.

Zgled 96 *Zapiši zvezo med* $\arccos x$ *in* $\arcsin x$.

Označimo $f(x) = \arccos x$ in $g(x) = \arcsin x$. Ker je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se odvoda funkcij $x \mapsto -f(x)$ in $x \mapsto g(x)$ ujemata. Po zgornji trditvi je zato $g(x) = -f(x) + c$ oz.

$$\arcsin x = -\arccos x + c. \tag{12}$$

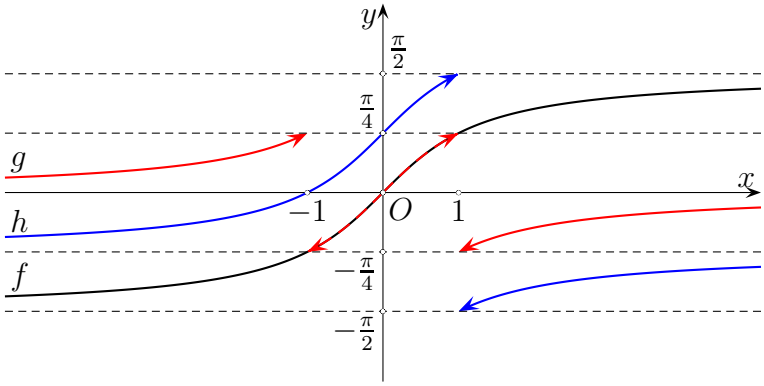
Ko vstavimo primeren x, npr. $x = 0$, dobimo $\arcsin 0 = -\arccos 0 + c$ in od tod $c = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. ■

Zgled 97 *Skiciraj grafe funkcij, podane s predpisi* $f(x) = \arctan x$, $g(x) = \frac{1}{2}\arctan \frac{2x}{1-x^2}$ *in* $h(x) = -\arctan \frac{x+1}{x-1}$.

Najprej opazimo, da je $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ in $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = g'(x) = h'(x)$, se funkcije na intervalih, ki so v presekih definicijskih območij, razlikujejo za konstante.

$F(x)$	$F(0)$	$\lim_{x\to-\infty} F(x)$	$\lim_{x\to\infty} F(x)$
$f(x) = \arctan x$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$g(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$	0	0	0
$h(x) = -\arctan\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

Iz tabele torej vidimo, da dobimo grafa funkcij g in h tako, da vzporedno premaknemo posamezne dele grafov funkcije f.



Izrek 61 *Naj bo funkcija f na intervalu (a,b) odvedljiva. Če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f naraščajoča. Če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f padajoča.*

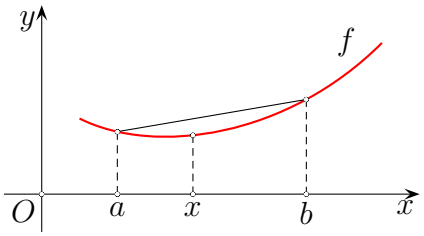
Dokaz. Izberimo $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Po Lagrangeovem izreku za funkcijo f na intervalu $[x_1,x_2]$, obstaja $\xi \in (x_1,x_2)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. V prvem primeru je $f'(\xi) > 0$, zato je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, kar nam da $f(x_2) > f(x_1)$. V drugem primeru pa je $f'(\xi) < 0$, zato je $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, kar nam da $f(x_2) < f(x_1)$. ■

4.8 Konveksnost, konkavnost, prevoji

Pravimo, da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ *konveksna* na intervalu $[a,b] \subset I$, če za vsako točko $x \in (a,b)$ velja

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

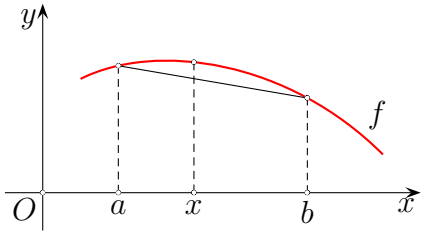
Grafično to pomeni, da na intervalu $[a,b]$ leži graf funkcije f **pod** premico skozi točki $(a,f(a))$ in $(b,f(b))$.



Pravimo, da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ *konkavna* na intervalu $[a,b] \subset I$, če za vsako točko $x \in (a,b)$ velja

$$f(x) \ge f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

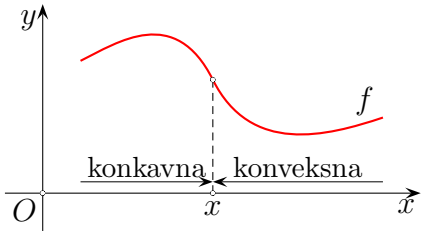
Grafično to pomeni, da na intervalu $[a,b]$ leži graf funkcije f **nad** premico skozi točki $(a,f(a))$ in $(b,f(b))$.



Neposredno iz definicije vidimo, da je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b] \subset I$ konveksna natanko tedaj, ko je funkcija $g\colon I \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $g(x) = -f(x)$, na tem intervalu konkavna.

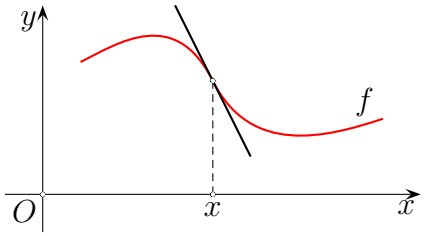
Izrek 62 *Funkcija je konveksna na intervalu $[a,b]$, če je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Funkcija je konkavna na intervalu $[a,b]$, če je $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b)$.*

Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Točka $x \in I$ je *prevoj* funkcije f, če se funkcija v njej spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno.



Izrek 63 *Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija. Če je $f''(x) = 0$ in f'' spremeni predznak pri prehodu čez točko x, je točka x prevoj funkcije f.*

Torej v prevojni točki graf funkcije seka tangento na graf funkcije v tej točki.

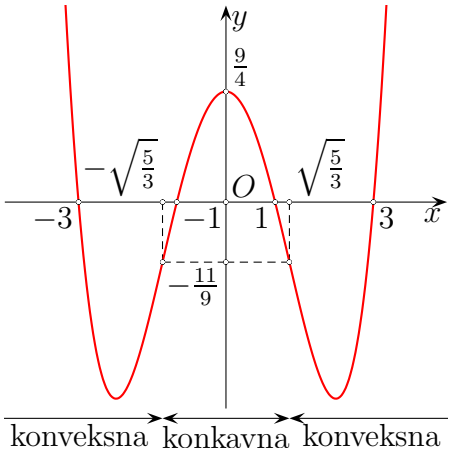


Zgled 98 *Določi območje konveksnosti, konkavnosti in prevoje za funkcijo f, podano s predpisom $f(x) = \frac{1}{4}(x^2-9)(x^2-1)$.*

Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}(x^4 - 10x^2 + 1), \\ f'(x) &= \frac{1}{4}(4x^3 - 2\cdot 10x) = x^3 - 5x, \\ f''(x) &= 3x^2 - 5. \end{aligned}$$

Torej sta prevoja v točkah $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Funkcija konveksna na intervalih $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}})$ in $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty)$, konkavna pa na intervalu $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$.



4.9 Ekstremi funkcij

Spomnimo se, da za odvedljivo funkcijo f v lokalnem ekstremu x_0 velja $f'(x_0) = 0$. Ali velja obrat, tj. ali lahko iz pogoja $f'(x_0) = 0$ sklepamo, da ima funkcija f je v točki x_0 lokalni ekstrem? Odgovor je v splošnem negativen: funckija, podana s predpisom $f(x) = x^3$, v točki $x_0 = 0$ nima ekstrema. Kot kaže spodnji izrek, pa nam stacionarne točke kljub temu zelo koristijo pri iskanju ekstremov:

Izrek 64 *Naj bo x_0 stacionarna točka funkcije f.*

1. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.*
2. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.*
3. *Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x)$ enakega predznaka za vse $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.*

Dokaz. Po izreku 61 je funkcija naraščajoča, če je $f' > 0$ in padajoča, če je $f' < 0$.

V prvem primeru je f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ naraščajoča, zato je $f(x) < f(x_0)$ za $x_0 - \delta < x < x_0$. Podobno je f na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ padajoča, zato je $f(x_0) > f(x)$ za $x_0 < x < x_0 + \delta$. Torej je $f(x) > f(x_0)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ in je x_0 lokalni maksimum.

Drugi primer dokažemo podobno kot prvi.

V tretjem primeru pa npr. vzemimo, da je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Potem je na intervalih $(x_0 - \delta, x_0)$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ funkcija f naraščajoča, kar pomeni, da je

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

za vsak $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ in vsak $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$. Torej v točki x_0 funkcija f nima ekstrema. ■

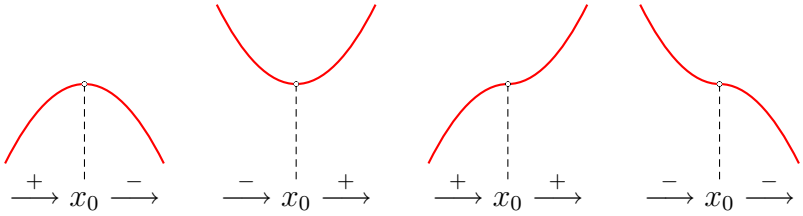
Pri prehodu preko stacionarne točke so možne štiri kombinacije predznakov odvoda in dve od teh nam dasta lokalni ekstrem, v drugih dveh primerih pa ekstrema ni

f' se spremeni: $\overset{+}{\longrightarrow} x_0 \overset{-}{\longrightarrow}$ lokalni maksimum

f' se spremeni: $\overset{-}{\longrightarrow} x_0 \overset{+}{\longrightarrow}$ lokalni minimum

f' se spremeni: $\overset{+}{\longrightarrow} x_0 \overset{+}{\longrightarrow}$ ni ekstrema

f' se spremeni: $\overset{-}{\longrightarrow} x_0 \overset{-}{\longrightarrow}$ ni ekstrema



Zgled 99 *Karakteriziraj vse stacionarne točke funkcije, podane s predpisom* $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

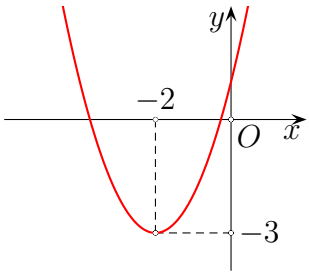
Rešitev. Ker je

$$f'(x) = 2x + 4,$$

je edina stacionarna točka pri $x_0 = -2$. Iz zapisa $f'(x) = 2(x+2)$ sledi, da je $f'(x) < 0$ za $x < -2$ in $f'(x) > 0$ za $x > -2$. Torej imamo prehod oblike

$$\overset{-}{\longrightarrow} x_0 \overset{+}{\longrightarrow},$$

ki nam da lokalni minimum. ■

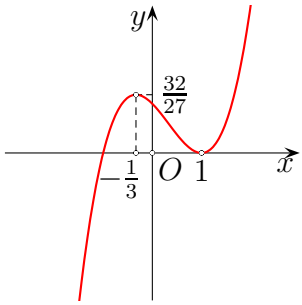


Zgled 100 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Rešitev. Izračunajmo odvod:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Ker je $3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$, vidimo od tod, da je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -\frac{1}{3}$ in $x_2 = 1$.
Če je $x < x_1$, je $f'(x) > 0$. Če je $x_1 < x < x_2$, je $f'(x) < 0$. Če pa je $x_2 < x$, je spet $f'(x) > 0$. Pri stacionarni točki $x_1 = -\frac{1}{3}$ imamo torej prehod oblike $\overset{+}{\longrightarrow} x_1 \overset{-}{\longrightarrow}$, ki nam da lokalni maksimum. Pri stacionarni točki $x_2 = 1$ pa imamo prehod oblike $\overset{-}{\longrightarrow} x_1 \overset{+}{\longrightarrow}$, ki nam da lokalni minimum. ■

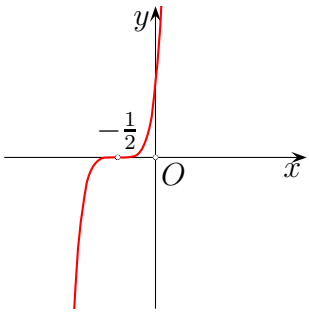


Zgled 101 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x) = (2x + 1)^5$.

Rešitev. Ker je

$$f'(x) = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4,$$

je edina stacionarna točka pri $x_0 = -\frac{1}{2}$. Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \neq -\frac{1}{2}$, imamo pri x_0 prehod oblike $\overset{+}{\longrightarrow} x_0 \overset{+}{\longrightarrow}$, kar pomeni, da v tej točki ni ekstrema. ■



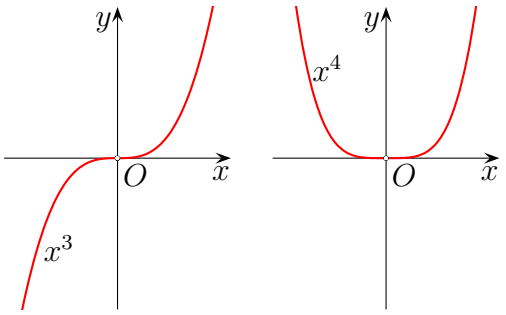
Pogosto pa je funkcija, katere ekstrem iščemo, (vsaj) dvakrat odvedljiva. V tem primeru velja:

Izrek 65 *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva. Če v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) < 0$, je v tej točki lokalni maksimum. Če v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) > 0$, je v tej točki lokalni minimum.*

Dokaz. Oglejmo si primer, da v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) < 0$. Potem je funkcija $g = f'$ v okolici točke x_0 padajoča. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) = g(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ in $f'(x) = g(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Torej imamo za funkcijo f' prehod oblike $\overset{+}{\longrightarrow} x_0 \overset{-}{\longrightarrow}$, kar pomeni, da je v točki lokalni maksimum.

Če pa v stacionarni točki x_0 velja $f''(x_0) > 0$, je funkcija f' v okolici točke x_0 naraščajoča. Podobno kot zgoraj vidimo, da imamo v tem primeru prehod oblike $\overset{-}{\longrightarrow} x_0 \overset{+}{\longrightarrow}$, ki nam da lokalni minimum. ■

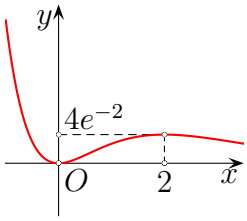
Opozorilo. Če je $f''(x_0) = 0$ v stacionarni točki x_0, to ne pomeni, da v tej točki ni ekstrema, pač pa le, da o naravi stacionarne točke ne moremo sklepati na podlagi drugega odvoda. Za primer vzemimo funkciji $f\colon x \mapsto x^3$ in $g\colon x \mapsto x^4$, za kateri sta prvi in drugi odvod v točki $x_0 = 0$ enaka 0. Funkcija f v točki x_0 nima ekstrema, funkcija g pa ima lokalni (celo globalni) minimum.



Zgled 102 *Poišči vse ekstreme funkcije, podane s predpisom $f(x) = x^2 e^{-x}$.*

Rešitev. Odvajajmo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (-x^2 + 2x)e^{-x} \\ f''(x) &= (-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} \end{aligned}$$



Iz pogoja

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x} = 0$$

izpeljemo, da ima funkcija stacionarni točki $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Iz $f''(x_1) = f''(0) = 2 > 0$ sledi, da je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum. Iz $f''(x_2) = f''(2) = -2e^{-2} < 0$ pa sledi, da je v točki $x_2 = 2$ lokalni maksimum. ■

Ekstrem zvezne funkcije na zaprtem intervalu Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Po izreku 43 vemo, da zvezna funkcija f na **zaprtem** intervalu zavzame največjo in najmanjšo vrednst. Če je funkcija f na odprtem intervalu (a, b) odvedljiva, je ekstremna točka stacionarna (izrek 56). Ekstrem pa lahko doseže tudi v krajišču intervala ali pa v točki, kjer funkcija f sploh ni odvedljiva. Povzemimo:

Če zavzame f v točki x ekstremno vrednost, je x

- stacionarna točka funkcije f ali

- krajišče intervala ali
- točka, v kateri f ni odvedljiva.

Opozorilo. Ni nujno, da funkcija v krajišču ekstrem dejansko doseže.

Zgled 103 *Ali ima funkcija* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *podana s predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & \text{če je } 0 < x \leq 1 \text{ in} \\ 0, & \text{če je } x = 0, \end{cases}$$

lokalna ekstrema v točkah $x = 0$ *in* $x = 1$*?*

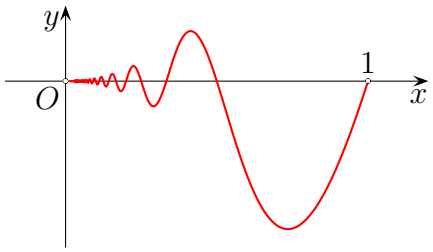
Za $x > 0$ velja

$$f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} + x^2 \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x},$$

zato je $f'_L(1) = \pi$ in je v točki $x = 1$ lokalni maksimum. Zaradi

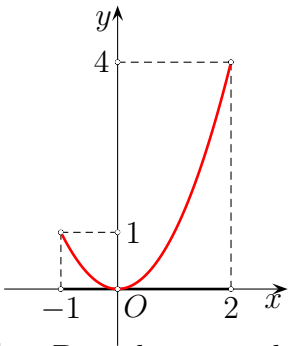
$$f'_D(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{\pi}{h}}{h} = 0$$

je funkcija f z desne odvedljiva v 0 in $x = 0$ je njena stacionarna točka. Ker pa funkcija f zavzame pozitivne in negative vrednosti poljubno blizu točke $x = 0$, v tej točki ni lokalnega ekstrema.



Zgled 104 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije* $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, *podane s predpisom* $f(x) = x^2$.

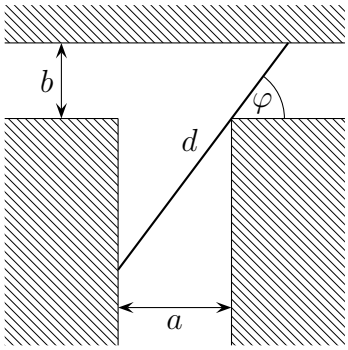
Dokaz. Stacionarna točka je le ena sama: $f'(x) = 2x$ in $f'(x) = 0$ le za $x = 0$. Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x = 0$ lokalni minimum. Ker je $f(x) \geq 0$ za vsak x, je v točki $x = 0$ tudi globalni minimum. Ker je f na intervalu $(-1,2)$ povsod odvedljiva, si moramo ogledati le še vrednost v krajiščih: $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$. Torej je največja vrednost funkcije f enaka 4, funkcija pa to vrednost zavzame v točki 2. ■



Zgled 105 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, *podane s predpisom* $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Rešitev. Ker je $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \neq 0$, funkcija nima stacionarnih točk. Ekstrem lahko nastopi še v krajiščih (tj. pri $x = \pm 1$) in v točki $x = 0$, kjer funkcija f ni odvedljiva. S pomočjo vrednosti $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ in $f(0) = 0$ ugotovimo, da ima funkcija v točki $x = 0$ lokalni minimum, v točkah ± 1 pa lokalna maksima. ■

Zgled 106 *Kanal širine a se pravokotno stika s kanalom širine b. Določi dolžino najdaljše (tanke) palice, ki lahko priplava iz enega v drugi kanal.*



Rešitev. Pri danem kotu φ je dolžina najdaljše palice, ki lahko priplava iz enega v drugi kanal, enaka

$$d(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}.$$

Iščemo *minimum* te funkcije. Velja

$$d'(\varphi) = a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - b\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Če je $d'(\varphi) = 0$, sledi $\tan\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Potem je

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\varphi} &= \sqrt{1+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}},\\ \frac{1}{\sin\varphi} &= \sqrt{1+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}},\end{aligned}$$

od koder sledi

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3} = \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Točka je res minimum, saj imamo pri $d'(\varphi) = a\frac{\sin^3\varphi - b\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$ premeno tipa $\xrightarrow{-}\varphi\xrightarrow{+}$.

4.10 Risanje grafov funkcij

Asimptote Funkcija g je *asimptota* funkcije f, ko gre x proti ∞, če velja

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0.$$

Najpogosteje obravnamo *linearne asimptote*, tj. premice. Da bi bila premica z enačbo $y = kx + n$ asimptota, mora veljati

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-n) = 0.$$

Torej je $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - k)$. Ker limita $\lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - k)$ obstaja, od tod sledi, da je $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - k) = 0$. Torej smo dokazali, da je

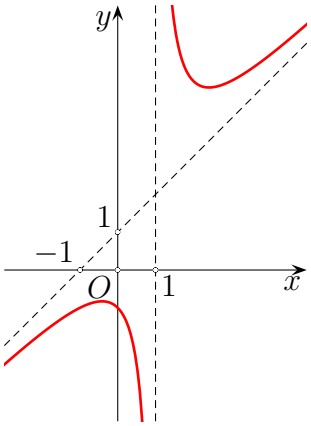
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \\ n &= \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx). \end{aligned}$$

Zgled 107 *Zapiši enačbo linearne asimptote funkcije f, podane s predpisom $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1, \\ n &= \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

Enačba asimptote se torej glasi $y = kx + n = x + 1$ in je enaka tudi, ko gre x proti $-\infty$. ■



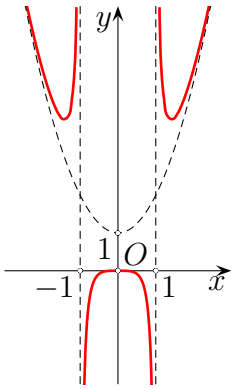
Pripomniti velja, da lahko pri racionalnih funkcijah do (linearne) asimptote pridemo hitreje z deljenjem polinomov. Ker je $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$, lahko v gornjem primeru zapišemo

$$\frac{x^2+1}{x-1} = (x+1) + \frac{2}{x-1}.$$

Ker je $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = 0$, velja $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (x+1)) = 0$ in je zato $y = x + 1$ res asimptota funkcije f. Z opisano metodo lahko pri racionalnih funkcijah poiščeno tudi polinomsko asimptoto.

Zgled 108 *Dana je racionalna funkcija f, $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$. Poišči polinom g, da bo $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$.*

Z deljenjem polinomov dobimo $x^4 = (x^2+1)(x^2-1) + 1$. Torej je $f(x) = (x^2+1) + \frac{1}{x^2-1}$. Iskani polinom je $g(x) = x^2 + 1$.



Risanje grafov funkcij Pri risanju grafov funkcij obravnavamo naslednje elemente:

- definicijsko območje, ničle in pole funkcije,
- ekstreme funkcije,
- asimptote
- in po potrebi prevoje.

Zgled 109 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{(1+x)^2}.$$

Definicijko območje: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ničle: $\{1\}$, poli: $\{-1\}$. Ker je

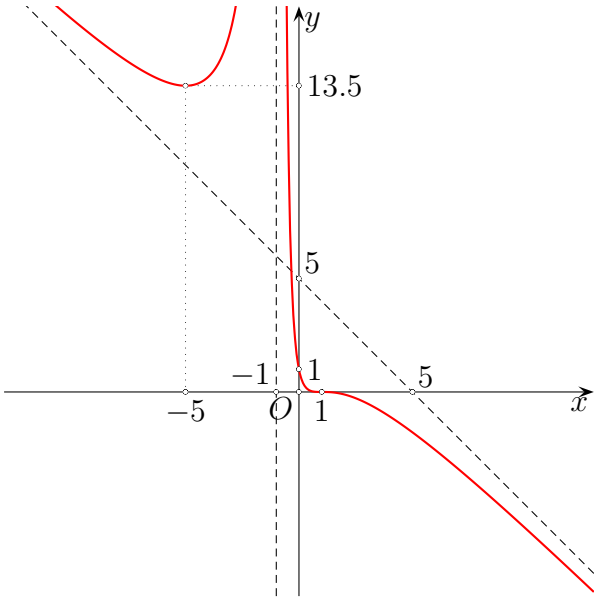
$$f'(x) = \frac{-3(1-x)^2(1+x) - 2(1-x)^3(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{(1-x)^2(-5-x)}{(1+x)^3},$$

sta $x = -5$ in $x = 1$ stacionarni točki. Z analizo spremembe predznaka odvoda pri prehodu preko stacionarne točke ugotovimo, da je pri $x = -5$ lokalni minimum, v točki $x = 1$ pa ni ekstrema. Ker je

$$f''(x) = \frac{24(1-x)}{(1+x)^4},$$

je v točki $x = 1$ prevoj.

Z deljenjem ugotovimo: $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 2x + 1)(-x + 5) + (-6x - 4)$, torej je $f(x) = (-x + 5) + \frac{-6x-4}{(x+1)^2}$ in je $y = -x + 5$ linearna asimptota.



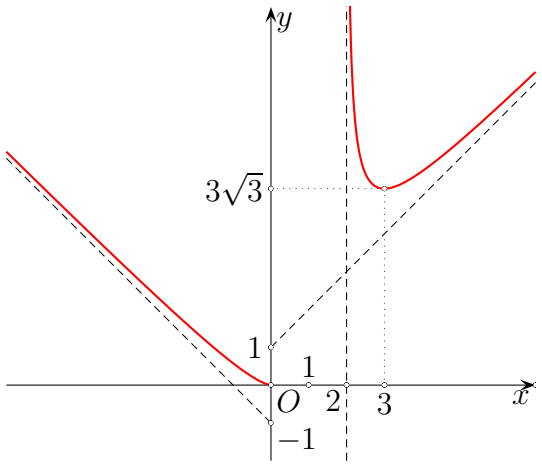
Zgled 110 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

$D_f = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$, ničle: $\{0\}$, poli: $\{2\}$. Z odvajanjem dobimo $f'(x) = (x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}}$. Z analizo spremembe predznaka pri prehodu čez točko $x = 3$ oz. pri $x \uparrow 0$ ugotovimo, da ima f lokalna minima pri v točkah $(0, 0)$ in $(3, 3\sqrt{3})$. Opazimo, da se pri $x = 0$ graf dotika abscisne osi. Ker je $f''(x) = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}$, funkcija nima prevojev. Določimo linearne asimptote:

$$\begin{aligned}
k_+ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1,\\
n_+ &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x-2} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x} =\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3(x-2)} + x(x-2)} = 1,\\
k_- &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1,\\
n_- &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x-2} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x} =\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-\sqrt{x^3(x-2)} - x(x-2)} = -1.
\end{aligned}$$

Tu velja opozoriti, da smo pri zadnjih dveh računih upoštevali, da gre $x \to -\infty$. Torej je $x < 0$ in zato $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Funkcija ima torej dve linearni asimptoti: $y = k_+x + n_+ = x + 1$ za $x \to \infty$ in $y = k_-x + n_- = -x - 1$ za $x \to -\infty$.



Zgled 111 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = x \ln^2 x.$$

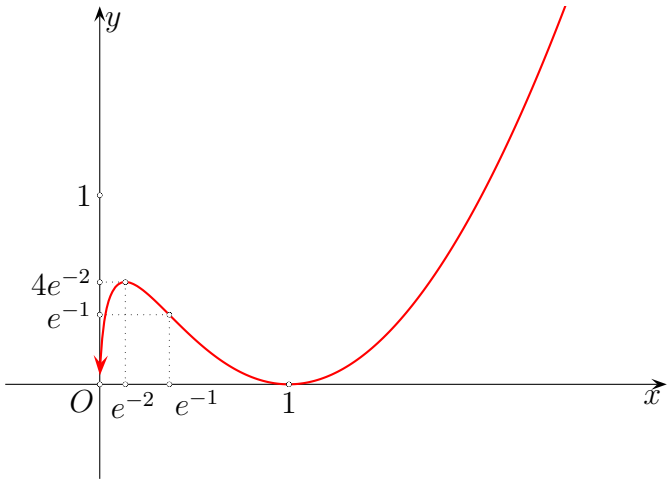
Definicijsko območje: $D_f = (0, \infty)$, ničle: $\{0\}$. Ker je

$$f'(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2),$$

sta $x = 1$ in $x = e^{-2}$ stacionarni točki. Z analizo spremembe predznaka pri prehodu čez stacionarni točki ugotovimo, da je $(e^{-2}, 4e^{-2})$ lokalni maksimum, $(1, 0)$ pa lokalni minimum.
Iz odvoda tudi vidimo, da ima f asimptotično navpično tangento za $x \downarrow 0$. Ker je

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x) + 1)}{x}$$

in f'' spremeni predznak pri prehodu preko točke e^{-1}, je v točki (e^{-1}, e^{-1}) prevoj.



Zgled 112 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = \operatorname{arc\,tan}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

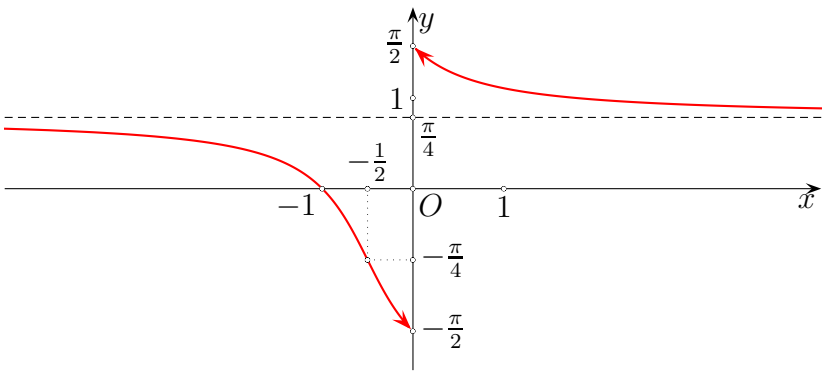
Definicijsko območje: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ničle: $\{-1\}$. Ker je

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1},$$

funkcija nima stacionarnih točk. Ker je povsod odvedljiva in definirana na uniji odprtih intervalov, nima ekstremov. Ker je

$$f''(x) = \frac{2(2x + 1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2},$$

ima funkcija prevoj v točki $(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$. Funkcija ima vodoravno asimptoto $y = \frac{\pi}{4}$ za $x \to \infty$ in $x \to -\infty$.



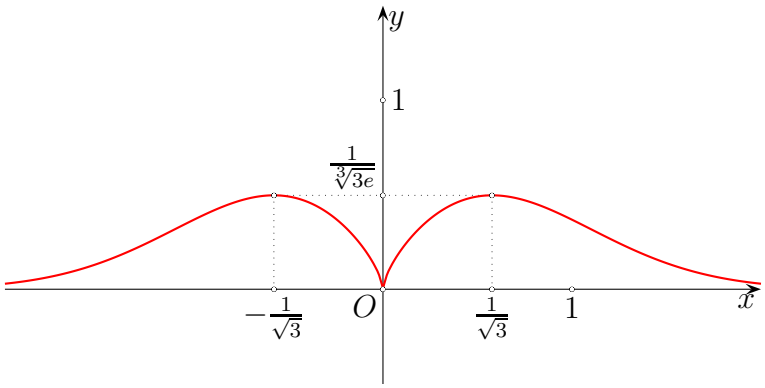
Zgled 113 *Nariši graf funkcije f, podane s predpisom*

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} e^{-x^2}.$$

Definicijsko območje: $D_f = \mathbb{R}$, ničla $\{0\}$. Ker je

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}(3x^2 - 1)e^{-x^2},$$

sta stacionarni točki $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Z analizo spremembe predznaka odvoda pri prehodu preko stacionarne točke vidimo, da sta točki $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3e}})$ in $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3e}})$ lokalna maksima. Funkcija v točki $x = 0$ ni odvedljiva in ima asimptotično navpično tangento pri $x \to 0$. Ker je $f(0) = 0$ in $f(x) > 0$ za $x \neq 0$, je v točki $(0, 0)$ (globalni) minimum.



4.11 Odpravljanje nedoločenosti in L'Hôpitalovo pravilo

Če imata pri funkciji F, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, števec in imenovalec v kakšni točki a skupno ničlo, pravimo, da ima funkcija v točki a *nedoločenost oblike* $\frac{0}{0}$. Kljub temu pa je možno, da obstaja limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Če sta npr. f in g polinoma, $x = a$ pa enostavna ničla za f in g, lahko zapišemo $f(x) = (x - a)f_1(x)$ in $g(x) = (x - a)g_1(x)$, kjer je $f_1(a) \neq 0 \neq g_1(a)$. Tedaj je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x - a)f_1(x)}{(x - a)g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}.$$

Zgled 114 *Izračunaj* $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Računajmo $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$.

Pogosto pa si lahko pri odpravljanju nedoločenosti pomagamo z odvodom.

Izrek 66 (L'Hôpitalovo pravilo) *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v okolici točke a in $f(a) = g(a) = 0$. Obstaja naj $\delta > 0$, da je $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak x, za katerega je $0 < |x - a| < \delta$. Če obstaja $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.*

Dokaz. Vzemimo poljubno točko $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ in definirajmo $A = \frac{f(x)}{g(x)}$. Vpeljimo funkcijo F, $F(t) = f(t) - Ag(t)$, definirano na intervalu med a in x. Tedaj je $F(a) = f(a) - Ag(a) = 0$ in $F(x) = f(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = 0$. Po Rolleovem izreku obstaja točka $\xi = \xi(x)$ med a in x, da je $F'(\xi) = 0$. Torej je $F'(\xi) = f'(\xi) - Ag'(\xi) = 0$, kar nam da $A = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Sedaj pa lahko izračunamo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

saj leži ξ med x in a in je $\lim_{x\to a} \xi(x) = a$. ■

Zgled 115 *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Računajmo $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$. ■

Uporaba L'Hospitalovega pravila je vsekakor enostavna in je zagotovo najbolj priljubljena metoda za izračun limit. Pravilo pa v sebi skriva kar nekaj pasti.

- Najpogostejša napaka je, da izraz $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ zamenjamo z odvodom ulomka $\frac{f(x)}{g(x)}$; tj. z izrazom $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. Seveda pa to ni res, saj je $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g(x)}{g^2(x)}$ in slednji izraz zagotovo ni enak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Pred uporabo L'Hospitalovega pravila se moramo prepričati, da so izpolnjene VSE predpostavke. Prav tako tudi ne smemo pozabti, da lahko s pomočjo L'Hospitalovega pravila odpravljamo le nedoločenosti tipa $\frac{0}{0}$ (ali $\frac{\infty}{\infty}$, kot pravi izrek 67). Če želimo L'Hôpitalovo pravilo uporabljati tudi v drugih primerih, moramo nedoločene izraze najprej primerno preoblikovati.

Izrek 67 *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v okolici točke a in* $\lim_{x\to a} f(a) = \lim_{x\to a} g(a) = \infty$. *Če obstaja* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *obstaja tudi* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *in sta enaki.* ■

Brez dokaza povejmo še, da lahko izreka 66 in 67 uporabljamo tudi v primeru $a = \infty$ ali pa za enostransko limito $\lim_{x\uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ oz. $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Odpravljanje nedoločenosti tipa $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$. Ti dve nedoločenosti spadata v osnovno verzijo L'Hôpitalovega pravila.

Zgled 116 *Izračunaj* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(x+1)}$.

Rešitev. Gre za nedoločenost tipa $\frac{0}{0}$. Računajmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

Zgled 117 *Izračunaj limito* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.

Računajmo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Odpravljanje nedoločenosti tipa $0 \cdot \infty$ ali $\infty \cdot 0$. Izraz $f(x) \cdot g(x)$ preoblikujemo v tistega izmed ekvivalentnih izrazov $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ali $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, pri katerem je imenovalec lažje odvajati.

Zgled 118 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln^2 x$.

Rešitev. Gre za nedoločenost tipa $0 \cdot \infty$, zato je smiselno zapisati $x \ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{x^{-1}}$. Sledi

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2 \ln x}{-x^{-3}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2\frac{1}{x}}{3x^{-4}} = \frac{2}{3} \lim_{x \downarrow 0} x^3 = 0.$$

Opomba. Z enakim prijemom je možno dokazati, da je

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln^a x = 0 \quad \text{za vsak } a > 0.$$

Zgled 119 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$.

Rešitev. Tokrat je smiselno zapisati $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$. Sledi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Opomba. Z enakim prijemom je možno dokazati, da je

$$\lim_{x \to \infty} x^b e^{-x} = 0 \quad \text{za vsak } b \in \mathbb{R}.$$

(Če je $b \leq 0$, ni kaj dokazovati. Če je $b > 0$, pa zaporedoma uporabljamo L'Hôpitalovo pravilo.)

Odpravljanje nedoločenosti tipa $\infty - \infty$. Da bi lahko uporabili L'Hôpitalovo pravilo, moramo najprej izraz spretno preoblikovati.

Zgled 120 *Izračunaj* $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$.

Računajmo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je bilo zadnje odvajanje odveč, saj je

$$\frac{\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{1}{2 + 4\frac{x}{\sin x} \cos x - x^2},$$

od koder sledi, da limita res $\frac{1}{6}$. ■

Odpravljanje nedoločenosti tipa 1^∞, ∞^0 in 0^0. Pri vseh treh nedoločenostih uporabimo enak prijem: izraz logaritmiramo in prevedemo na nedoločenost tipa $0\cdot\infty$ ali $\infty\cdot 0$. Natančneje: če želimo izračunati $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L$, izračunamo raje $K = \lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, od koder potem sledi $L = e^K$.

Zgled 121 *Izračunaj* $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$.

Rešitev. Ko logaritmiramo, dobimo $\ln(x^x) = x\ln x$. Po že izračunanem je $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\ln x = 0$, od koder sledi, da je iskana limita enaka $e^0 = 1$. ■

Zgled 122 *Izračunaj* $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$.

Gre za nedoločenost tipa 1^∞, zato izraz logaritmiramo;

$$\lim_{x\to 0}\ln((e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}{1} = 3$$

in od tod $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}} = e^3$. ■

Zgled 123 *Izračunaj* $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Gre za nedoločenost tipa ∞^0. Ko logaritmiramo, dobimo $\ln((\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}) = \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$. Torej je

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{-1}{\sin x\cos x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{-x}{\sin x\cos x} = -1,$$

od koder sledi $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$. ■

4.12 Taylorjeva vrsta

Ko vstavimo v polinom

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

izraz $x = a + h$, dobimo

$$f(a+h) = c_0 + c_1(a+h) + c_2(a+h)^2 + \ldots + c_n(a+h)^n. \tag{13}$$

Gornji izraz lahko preoblikujemo v

$$f(a+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \ldots + b_nh^n, \tag{14}$$

kjer je $b_k = b_k(a)$. Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} f(a+h) &= b_0 + b_1h + b_2h^2 + \ldots + b_nh^n,\\ f'(a+h) &= b_1 + 2b_2h + \ldots + nb_nh^{n-1},\\ f''(a+h) &= 2b_2 + 3\cdot 2b_3h + \ldots + n(n-1)b_nh^{n-2},\\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a+h) &= n(n-1)\cdots 1 \\ f^{(n+1)}(a+h) &= 0 \end{aligned}$$

Če sedaj v gornjih enačbah postavimo $h = 0$, dobimo $f(a) = b_0$, $f'(a) = b_1$, $f''(a) = 2b_2$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(a+h) = n!b_n$; torej

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{za } k = 0, 1, \ldots, n,$$

kjer smo definirali $0! = 1$ in $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ za $k \in \mathbb{N}$. Če sedaj to upoštevamo v (14), dobimo

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Ker je $a + h = x$, lahko zapišemo *Taylorjevo formulo* za polinom f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \tag{15}$$

Zgled 124 *Zapiši polinom najmanjše stopnje, za katerega je* $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$ *in* $f''(1) = 6$, *vsi višji odvodi pa so enaki* 0.

Rešitev. Naj bo f iskani polinom. Ker je $f^{(k)}(x) = 0$ za $k \geq 3$, lahko postavimo $n = 2$. Uporabimo formulo (15) in zapišemo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 = \\ &= 1 + 3(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 6(x-1)^2 = 3x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Zgled 125 *Zapiši polinom* $f(x) = x^3 + x^2$ *po potencah izraza* $x + 1$.

Rešitev. Ker je $x + 1 = x - (-1)$, gre za razvoj polinoma okoli točke $a = -1$. Po vrsti izračunamo $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 3x^2 + 2x|_{x=-1} = 1$, $f''(-1) = 6x + 2|_{x=-1} = -4$ in $f'''(-1) = 6|_{x=-1} = 6$. Torej po formuli (15) velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (x+1)^k = \\ &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2} f''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{6} f'''(-1)(x+1)^3 = \\ &= 0 + 1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1)^2 + 1 \cdot (x+1)^3. \end{aligned}$$

Opomba. Pripomniti velja, da lahko razvoj polinoma po potencah izraza $(x + 1)$ enostavno izračunamo tudi s pomočjo deljenja polinomov po Hornerjevi metodi. Računajmo

	1	1	0	0	
		-1	0	0	
$x=-1$	1	0	0	$\boxed{0}$	koeficient pri $(x+1)^0$
		-1	1		
$x=-1$	1	-1	$\boxed{1}$		koeficient pri $(x+1)^1$
		-1			
$x=-1$	1	$\boxed{-2}$			koeficient pri $(x+1)^2$
$x=-1$	$\boxed{1}$				koeficient pri $(x+1)^3$

Če je f poljubna funkcija, ki je v točki $x=a$ n-krat odvedljiva, lahko zapišemo polinom

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{16}$$

Za polinom P_n velja $P_n(a)=f(a)$ in $P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$ za $k=1,2,\ldots,n$. V splošnem pa $P_n(x)$ ni enak $f(x)$ za vsak x, ampak je le približek. Izraz

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

imenujemo *ostanek v Taylorjevi formuli* (in je odvisen od x, a in n.)

V nadaljevanju si oglejmo $(n+1)$-krat odvedljivo funkcijo $f\colon I\to\mathbb{R}$. Naj bo $x\in I$ poljubna točka z odprtega intervala I. Postavimo

$$g(t)=-f(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k+R_n(x)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1}.$$

Potem je $g(a)=g(x)=0$ in po Rolleovem izreku obstaja točka ξ med a in x, da je $g'(\xi)=0$. Računajmo

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}+R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-a)^{n+1}}= \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ker je $g'(\xi)=0$, sledi $\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-\xi)^n=R_n(x)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}$ in od tod

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Gornji izraz imenujemo *Lagrangeova oblika ostanka v Taylorjevi formuli.* Povzemimo

Izrek 68 *Naj bo $n\in\mathbb{N}$ in f zvezna funkcija, definirana na zaprtem intervalu med a in x, ki je na odprtem intervalu med a in x $(n+1)$-krat odvedljiva. Potem obstaja število ξ med a in x, da je*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Pri fiksnem a je ostanek v Taylorjevi formuli odvisen še od x in n. Pri funkcijah, ki so neskončnokrat odvedljive, se lahko zgodi, da je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Za take funkcije velja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Gornji izraz imenujemo *Taylorjeva vrsta funkcije f v okolici točke $x = a$.*

Taylorjeva vrsta za e^x Naj bo $f(x) = e^x$. Videli smo že, da je $f^{(k)}(x) = e^x$ za vsak k. Torej je razvoj pri $a = 0$ enak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_n(x),$$

kjer je $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$, ξ med 0 in x. Za vsak x in vsak ξ je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} = 0.$$

Razvoj za eksponentno funkcijo se torej glasi

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $\sin x$ Naj bo $f(x) = \sin x$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}), \\ f''(x) &= -\sin x = \sin(x + 2\cdot\tfrac{\pi}{2}), \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin(x + 3\cdot\tfrac{\pi}{2}), \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin(x + 4\cdot\tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Torej za vsak k velja

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\cdot\tfrac{\pi}{2}).$$

Pri $a = 0$ je zato $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $\ldots$, kar nam da

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ostanek te vrste je namreč $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2})$ in podobno kot prej ocenimo $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Torej je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $\cos x$ Taylorjevo vrsto za cos izpeljemo podobno kot vrsto za sin. Naj bo $f(x) = cosx$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}), \\ f''(x) &= -\cos x = \cos(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}), \\ f'''(x) &= \sin x = \cos(x + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2}), \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = \cos(x + 4 \cdot \tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Torej za vsak k velja

$$f^{(k)}(x) = \cos(x + k \cdot \tfrac{\pi}{2}).$$

Pri $a = 0$ je zato $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$, ..., kar nam da

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Ostanek te vrste je namreč $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2})$ in podobno kot prej ocenimo $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Torej je

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Taylorjeva vrsta za $(1 + x)^r$ Naj bo $f(x) = (1 + x)^r$. Potem je

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(1+x)^{r-1}, \\ f''(x) &= r(r-1)(1+x)^{r-2}, \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= r(r-1)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}. \end{aligned}$$

Za vsak k torej velja $f^{(k)}(0) = r(r-1)\cdots(r-k+1)$ in lahko zapišemo

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Dokazati je možno, da je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za $|x| < 1$. Razvoj v potenčno vrsto se torej glasi

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k \quad \text{za } |x| < 1,$$

kjer smo označili $\binom{r}{0} = 1$ in $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$.

Oglejmo si nekaj primerov razvojev v binomsko vrsto:

Za $r = -1$ imamo $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$. Po vrsti izračunamo $\binom{-1}{1} = -1$, $\binom{-1}{2} = 1$, $\binom{-1}{3} = -1$, ... Torej je

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad \text{za } |x| < 1.$$

Ta razvoj pravzaprav že poznamo. Gre za vsoto konvergentne geometrijske vrste s kvocientom $q = -x$. Vsota je res $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

Za $r = \frac{1}{2}$ imamo $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$. Po vrsti izračunamo $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}$, $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}$, ... Torej je

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots \quad \text{za } |x| < 1.$$

Za $r = -\frac{1}{2}$ imamo $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Po vrsti izračunamo $\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}-1)}{2} = \frac{3}{8}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdot(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = -\frac{5}{16}$, ... Torej je

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \ldots \quad \text{za } |x| < 1.$$

Taylorjeva vrsta za $\ln(1+x)$ Za $f(x) = \ln(1+x)$ lahko izračunamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{-1}, \\ f''(x) &= -x^{-2}, \\ f'''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}. \end{aligned}$$

Sledi $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ in

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Ostanek v Lagrangeovi obliki je enak $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}(\frac{x}{1+\xi})^{n+1}$ in dokazati je možno, da je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za $|x| < 1$. Razvoj za logaritemsko vrsto se torej glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \quad \text{za } |x| < 1.$$

Uporaba Taylorjeve vrste pri računanju limit

Zgled 126 *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Rešitev. Ker je

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{3}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots, \\ \sqrt[3]{1-x} &= 1 - \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{3}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + \ldots, \end{aligned}$$

velja $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \frac{2}{3}x + 2\binom{\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots$ in

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x + 2\binom{\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots}{x} = \frac{2}{3}.$$

Zgled 127 *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}$.

Rešitev. Ker je $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ in $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$, je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots)-(1-\frac{1}{2}x^2+\ldots)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\ldots}{x} = 1.\end{aligned}$$

Zgled 128 *Izračunaj limito* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Rešitev. Ker je $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$, je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots}{x} = 1.$$

Zgled 129 *Razvij funkcijo* f, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *v Taylorjevo vrsto okoli* $x = 0$.

Rešitev. Ker je $\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$, lahko uporabimo razvoj za $f(t) = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$, $|t| < 1$, okoli $t = 0$, v katerega pišemo $t = x^2$. Sledi

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad \text{za } |x| < 1.$$

Že v izreku 65 smo ugotovili, da je v stacionarni točki x_0, v kateri je funkcija dvakrat odvedljiva, ekstrem, če je le $f''(x_0) \neq 0$. Če pa je $f''(x_0) = 0$, o obstoju ekstrema ne moremo sklepati. S pomočjo Taylorjeve formule lahko dokažemo:

Izrek 69 *Naj bo funkcija* f $(n+1)$*-krat odvedljiva. Če v stacionarni točki* x_0 *velja*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ in } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

kjer je n *sodo število, je v tej točki ekstrem in sicer lokalni maksimum, če je* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *in lokalni minimum, če je* $f^{(n)}(x_0) > 0$. *Če je* n *liho število, v tej točki ni ekstrema.*

Dokaz. Zaradi Taylorjeve formule je

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^{n+1} = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,$$

kjer je ξ točka med x_0 in x_0+h. Če je n sodo število in je npr. $f^{(n)}(x_0) > 0$, je $f^{(n)}(\xi) > 0$ tudi za vsak ξ blizu x_0 in je zato $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n > 0$ za vse h blizu 0. Torej je v točki x_0 lokalni minimum. Podobno dokažemo, da je v primeru $f^{(n)}(x_0) < 0$ v točki x_0 lokalni maksimum.

Če pa je n liho število, izraz h^n nima konstantnega predznaka za majhne h. V točki x_0 ni ekstrema, saj potem tudi $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n$ nima konstantnega predznaka za majhne h. ∎

5 Integralski račun

5.1 Nedoločeni integral

Naj bo $f\colon I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprti interval. Funkcijo F, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, imenujemo *nedoločeni integral* oz. *primitivna funkcija* funkcije f in označimo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Kot že ime pove, nedoločeni integral ni določen enolično, ampak velja

Izrek 70 *Če je F nedoločeni integral funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$, je njen nedoločeni integral tudi funkcija G, $G(x) = F(x) + c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta, in vsak nedoločeni integral funkcije f ima obliko $F(x) + c$.*

Dokaz. Po definiciji nedoločenega integrala je $F'(x) = f(x)$, zato je tudi $(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Za drugi del dokaza pa vzemimo neko funkcijo G, za katero je $G'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$. Ker je poleg tega še $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, velja $F'(x) = G'(x)$ za vsak x z **intervala** I. Po posledici 60 Lagrangeovega izreka obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $G(x) = F(x) + c$. ■

Torej je $\int f(x)\,dx$ določen le do aditivne konstante natančno. Če poznamo neko funkcijo F, da je $F(x) = \int f(x)\,dx$, smemo zapisati tudi $F(x) + c = \int f(x)\,dx$.

Zgled 130 *Izračunaj $\int x^2\,dx$.*

Rešitev. Ker je $(x^3)' = 3x^2$, je $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$. Torej je $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, kjer je $c \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta. ■

Zgled 131 *Izračunaj $\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$.*

Rešitev. Spomnimo se, da je $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$. Torej je $(\frac{1}{x+1})' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ in zato $\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + c$. ■

Zgled 132 *Izračunaj integral $\int \frac{1}{x}\,dx$.*

Spomnimo se, da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ za $x > 0$. Za $x < 0$ pa velja $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Torej je

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln(x) + c_1, & \text{če } x > 0, \\ \ln(-x) + c_2, & \text{če } x < 0. \end{cases}$$

Pogosto pišemo, da je $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, kjer je

$$c = c(x) = \begin{cases} c_1, & \text{če } x > 0, \\ c_2, & \text{če } x < 0. \end{cases}$$

funkcija, ki ni konstantna po vsej realni osi, je pa konstantna na pozitivnem in negativnem poltraku posebej. ■

Tabelo integralov nekaterih elementarnih funkcij dobimo iz tabele odvodov elementarnih funkcij. Torej je

$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c, \quad r \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c, \quad a > 0,\, a \neq 1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2}x\,dx = \tan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2}x\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1$
$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$

Pravila za integriranje

Izrek 71 *Če imata funkciji f in g nedoločena integrala, ga ima tudi njuna vsota in velja*

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(x) = \int g(x)\,dx$. Tedaj je $(F(x) + G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ in zato $\int(f(x)+g(x))dx = F(x)+G(x) = \int f(x)dx+\int g(x)dx$. ■

Izrek 72 *Če ima funkcija f nedoločen integral, ga ima za vsak $k \in \mathbb{R}$ tudi funkcija g, $g(x) = kf(x)$, in velja*

$$\int (kf(x))\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Tedaj je $(kF(x))' = k\,F'(x)) = k\,f(x)$ in zato $\int(k\,f(x))\,dx = k\,F(x) = k\int f(x)\,dx$. ■

Zgled 133 *Izračunaj $\int(x^5 + 3x^{-2} + 1)\,dx$.*

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\int (x^5 + 3x^{-2} + 1)\,dx &= \int x^5\,dx + \int 3x^{-2}\,dx + \int 1\,dx = \\ &= \frac{1}{6}x^6 + 3\cdot\frac{1}{-1}x^{-1} + x = \\ &= \frac{1}{6}x^6 - 3x^{-1} + x.\end{aligned}$$

Zgled 134 *Izračunaj $\int 5^x 3^{-x}\,dx$.*

Rešitev. Računajmo $\int 5^x 3^{-x}\,dx = \int(\frac{5}{3})^x\,dx = \frac{1}{\ln\frac{5}{3}}(\frac{5}{3})^x$.

S pomočjo gornjih dveh izrekov vidimo, da vsak polinom z realnimi koeficienti premore nedoločeni integral. Za polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tako velja

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\,dx = \\ &= \int a_n x^n\,dx + \int a_{n-1}x^{n-1}\,dx + \ldots + \int a_1 x\,dx + \int a_0\,dx = \\ &= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x.\end{aligned}$$

Zgled 135 *Izračunaj integral* $\int(6x^3 - 4x^2 - x)\,dx$.

Rešitev.

$$\begin{aligned}\int(6x^3 - 4x^2 - x)\,dx &= 6\cdot\frac{1}{4}x^4 - 4\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = \\ &= \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Zgled 136 *Izračunaj integral* $\int(x+1)^2(x-1)\,dx$.

Ker je $(x+1)^2(x-1) = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$, je

$$\int(x+1)^2(x-1)\,dx = \int(x^3 + x^2 - x - 1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - x.$$

Izrek 73 (Pravilo zamenjave) *Če ima funkcija f nedoločeni integral in je g odvedljiva funkcija, ima nedoločeni integral tudi funkcija h, $h(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$, in velja*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Če pišemo $x = g(t)$, dobimo $F(g(t)) = G(t)$ in $G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Sledi $F(x) = F(g(t)) = G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ in od tod $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$. ■

Gornji metodi pravimo metoda *zamenjave* (substitucije) integracijske spremenljivke in velja za eno najpomebnejših integracijskih metod.

Zgled 137 *Izračunaj* $\int(3+2x)^{42}\,dx$.

Rešitev. Ker je $(3+2x)^{42}$ polinom, bi ga (načeloma) lahko eksplicitno izračunali in nato integrirali po členih. Ker pa je stopnja v eksponentu neprijetno visoka, metoda **v praksi ni uporabna**.

Oglejmo si, kako uporabimo metodo zamenjave. Označimo $f(x) = (3+2x)^{42}$. Torej moramo izračunati integral $\int f(x)\,dx$. Če označimo $3+2x = t$, lahko izrazimo $x = \frac{t-3}{2} = g(t)$. Po izreku 73 je zato

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int f(g(t))g'(t)\,dt = \int t^{42}\frac{1}{2}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{43}t^{43} = \frac{1}{86}t^{43} = \frac{1}{86}(3+2x)^{43} + c.\end{aligned}$$

Običajno uporabljamo metodo zamenjave v nekoliko drugačni obliki. Pri gornjem integralu smo zapisali $3+2x = t$. Da bi formalno uporabili metodo zamenjave, moramo iz te zveze izraziti x kot funkcijo spremenljivke t. Vendar tega v resnici ne potrebujemo. Če izraz $3+2x = t$ diferenciramo, dobimo $dt = d(3+2x) = 2dx$, od koder izrazimo $dx = \frac{1}{2}dt$. Torej je $\int(3+2x)^{42}\,dx = \int t^{42}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{86}t^{43} = \frac{1}{86}(3+2x)^{43} + c$.

Zgled 138 *Izračunaj* $\int\frac{1}{x-7}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $x-7=t$. Torej je $dt=d(x-7)=dx$ in $\int \frac{1}{x-7}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln t=\ln(x-7)+c$. ■

Zgled 139 *Izračunaj* $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.

Pišimo $2x-1=t$. Torej je $dt=2dx$ in

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx=\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+c.$$

Zgled 140 *Izračunaj* $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$.

Vemo $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arc\,tan} x$. Pišimo $x=at$ in $dx=a\,dt$. Sledi

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\int \frac{a}{a^2t^2+a^2}\,dt=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan} t=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a}.$$

Zgled 141 *Izračunaj* $\int \frac{1}{a^2x^2+1}\,dx$.

Pišimo $ax=t$ in $a\,dx=dt$. Sledi

$$\int \frac{1}{a^2x^2+1}\,dx=\int \frac{\frac{1}{a}}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan} t=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan} ax.$$

Izrek 74 *Če je g odvedljiva funkcija, velja* $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\ln(g(x))+c$.

Pišimo $t=g(x)$. Tedaj je $dt=g'(x)\,dx$ in $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln t=\ln g(x)+c$. ■

Zgled 142 *Izračunaj* $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $x=at$ in $dx=a\,dt$. Sledi

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int \frac{a}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}\,dt=\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\operatorname{arc\,sin} t=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}.$$

Zgled 143 *Izračunaj* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $t=x^2+1$ in $dt=2x\,dx$. Sledi

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=t^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+1}+c.$$

Izrek 75 *Če je g odvedljiva funkcija, velja* $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\ln(g(x))+c$.

Dokaz. Pišimo $t=g(x)$. Tedaj je $dt=g'(x)\,dx$ in $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln t=\ln g(x)+c$. ■

Zgled 144 *Izračunaj* $\int \tan x\,dx$.

Rešitev. Ker je $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $(\cos x)' = -\sin x$, pišemo $\cos x = t$. Tedaj je $dt = -\sin x\,dx$ in $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln t = -\ln\cos x + c$. ■

Izrek 76 (Integracija po delih) *Če obstaja eden od integralov $\int f(x)g'(x)\,dx$ in $\int g(x)f'(x)\,dx$, obstaja tudi drugi in velja $\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$.*

Dokaz. Recimo, da obstaja integral $\int f(x)g'(x)\,dx$. Pišimo $F(x) = \int f(x)g'(x)\,dx$. Tedaj je $F'(x) = f(x)g'(x)$. Ker je $(f(x)g(x) - F(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f'(x)g(x)$, po definiciji nedoločenega integrala velja $f(x)g(x) - F(x) = \int f'(x)g(x)\,dx$ oz. $\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$. ■

Opomba. Pogosto pišimo pravilo za *integracijo po delih* (integracija *per partes*) v obliki

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ali

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv.$$

Zgled 145 *Izračunaj integral $\int x\ln x\,dx$.*

Rešitev. Bistvo integracije po delih je v tem, da integrand spretno zapišemo v obliki $f(x)g'(x)$. Torej v obliki produkta dveh funkcij, od katerih bo potrebno eno odvajati, drugo pa integrirati. Ker načeloma znamo odvajati vsako funkcijo, je potrebno spretno izbrati tisto funkcijo, ki jo bomo integrirali. V danem primeru lahko zapišemo $u = \ln x$ in $dv = x\,dx$. Tedaj je $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$ in lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx &= \ln x\cdot\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 = \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.\end{aligned}$$

Zgled 146 *Izračunaj integral $\int \ln x\,dx$.*

Rešitev. Ker funkcije ln ne znamo neposredno integrirati, jo bomo odvajali. Integrirali pa bomo tisto, kar je poleg nje. Skratka $u = \ln x$, $dv = dx$ in $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = x$. Torej lahko zapišemo

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c.$$

Opomba. Opisana metoda je uporabna tudi v splošnem za izračun integralov oblike $\int f(x)\ln x\,dx$, kjer je f polinom. V tem primeru funkcijo ln odvajamo, polinom poleg pa integriramo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral, ki je enostavno izračunljiv.

Zgled 147 *Izračunaj integral $\int x^2e^x\,dx$.*

Rešitev. Ker je $(e^x)' = e^x$, je precej vseeno, ali bomo eksponentno funkcijo integrirali ali odvajali. Ker je izraz poleg nje polinom (tj. x^2), ga je koristno odvajati in znižati njegovo stopnjo. Skratka $du = e^x\,dx$, $v = x^2$ in $u = e^x$, $dv = 2x\,dx$. Torej je

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx.$$

V preostalem integralu je polinom nižje stopnje kot prej, zato postopek ponovimo: $du = e^x\,dx$, $v = x$ in $u = e^x$, $dv = dx$. Torej je $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x$ in

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

■

Opomba. Opisana metoda je uporabna tudi v splošnem za izračun integralov oblike $\int f(x)e^x\,dx$, kjer je f polinom. V tem primeru funkcijo $x \mapsto e^x$ integriramo, polinom poleg nje pa odvajamo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral podobne oblike, kjer pa je stopnja polinoma za 1 manjša kot prej. Skratka: $\int f(x)e^x\,dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx$.

Integrala oblike $\int f(x)\sin x\,dx$ ali $\int f(x)\cos x\,dx$, kjer je f polinom, izračunamo podobno. V tem primeru funkcijo sin ali cos integriramo, polinom poleg nje pa odvajamo. Pri integraciji po delih nam v drugem členu ostane tako le še integral podobne oblike, kjer pa je stopnja polinoma za 1 manjša kot prej. Skratka

$$\begin{aligned}\int f(x)\sin x\,dx &= -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x\,dx,\\ \int f(x)\cos x\,dx &= f(x)\sin x - \int f'(x)\sin x\,dx.\end{aligned}$$

Zgled 148 *Izračunaj integral* $\int (x+1)\sin x\,dx$.

Rešitev. Pišimo $u = x + 1$ in $dv = \sin x\,dx$. Tedaj je $du = dx$, $v = -\cos x$ in $\int (x + 1)\sin x\,dx = -(x + 1)\cos x + \int \cos x\,dx = -(x + 1)\cos x + \sin x$. ■

Zgled 149 *Izračunaj integral* $\int x^2\cos x\,dx$.

Rešitev. Pišimo $u = x^2$ in $dv = \cos x\,dx$. Tedaj je $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$ in $\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$. Integral $\int x\sin x\,dx$ izračunamo enako kot v prejšnjem zgledu. Pišimo $u = x$ in $dv = \sin x\,dx$. Tedaj je $du = dx$, $v = -\cos x$ in $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$.

Zgled 150 *Izračunaj integrala* $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ *in* $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, *kjer je* $a \neq 0 \neq b$.

Rešitev. Uporabimo metodo integracije po delih. Poskusimo s prijemom $u = e^{ax}$ in $dv = \sin bx\,dx$. Tedaj je $du = ae^{ax}\,dx$ in $v = -\frac{1}{b}\cos bx$. Sledi

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx. \tag{17}$$

Integral $\int e^{ax}\cos bx$ poskusimo izračunati s podobnim prijemom: $u = e^{ax}$ in $dv = \cos bx\,dx$. Tedaj je $du = ae^{ax}\,dx$ in $v = \frac{1}{b}\sin bx$. Sledi

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx. \tag{18}$$

Če sedaj upoštevamo (18) v (17), dobimo

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right). \tag{19}$$

Opazimo, da integral, ki ga želimo izračunati, nastopa v gornji enačbi tudi na desni strani. Pišimo $\int e^{ax}\sin bx\,dx = I$. Tedaj iz (19) sledi

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos x + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I\right),$$

od koder izračunamo

$$I\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$$

in nazadnje $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$. Sledi

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

in podobno še

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

Opomba. Pri izračunu integrala smo dvakrat zaporedoma uporabili integracijo po delih. Vseeno je, katero izmed funkcij bomo na začetku integrirali, katero pa odvajali. Pomembno pa je, isti tip funkcije (eksponentno ali trigonometrično) tudi v drugem koraku integriramo.

Nazadnje omenimo še, da lahko s pomočno integracije po delih (z zelo veliko računanja) uženemo vse integrale oblike $\int f(x)e^{ax}\sin bx\,dx$ in $\int f(x)e^{ax}\cos bx\,dx$, kjer je $a \neq 0 \neq b$, f pa polinom z realnimi koeficienti. Pri tem moramo polinom vedno odvajati, preostalo funkcijo pa integrirati tako, kot smo to storili v zgledu 150.

Integral racionalne funkcije Izračunati želimo integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, kjer sta p in q polinoma.

Oglejmo si najprej enostaven primer. Naj bo $q(x) = (ax+b)^m$, kjer je $a \neq 0$. Tedaj lahko pišemo $ax+b = t$. Od tod izrazimo $x = \frac{1}{a}(t-b)$ in zapišemo $p(x) = p(\frac{1}{a}(t-b)) = r(t)$. Ker je $dx = \frac{1}{a}dt$, sledi $\int \frac{p(x)}{(ax+b)^m}\,dx = \int \frac{r(t)}{at^m}\,dt$. Funkcija r je še vedno polinom v t, zato ga lahko členoma delimo s t^m. Dobljene integrale zlahka izračunamo.

Zgled 151 *Izračunaj* $\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $x-1=t$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3}\,dx &= \int \frac{t+1+(t+1)^2}{t^3}\,dt = \int \frac{t^2+3t+2}{t^3}\,dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)dt = \ln t - \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} = \\ &= \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Če v integralu $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, kjer sta p in q polinoma, stopnja polinoma p ni nižja od stopnje polinoma q, lahko polinoma delno delimo. Torej je $p(x)=k(x)q(x)+r(x)$, kjer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q. Tedaj velja

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{k(x)q(x)+r(x)}{q(x)}\,dx = \int \left(k(x)+\frac{r(x)}{q(x)}\right)dx.$$

Integral $\int k(x)\,dx$ je enostavno izračunljiv. V preostalem integralu $\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ pa je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca.

Poiščimo vse (realne in kompleksne) ničle polinoma q. Ker ima ta polinom realne koeficiente, nastopajo realne ničle v konjugiranih parih. Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned}q(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_m)^{\alpha_m}\cdot \\ &\quad \cdot(x-y_1)^{\beta_1}(x-\overline{y_1})^{\beta_1}(x-y_2)^{\beta_2}(x-\overline{y_2})^{\beta_2}\cdots(x-y_n)^{\beta_n}(x-\overline{y_n})^{\beta_n},\end{aligned}$$

kjer je $x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}$, $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Naj bo $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Za $a_j=-(y_j+\overline{y_j})$ in $b_j=|y_j|^2$ lahko zapišemo

$$(x-y_j)(x-\overline{y_j}) = x^2-(y_j+\overline{y_j})x+|y_j|^2 = (x^2+a_jx+b_j)^{\beta_j}.$$

Poudarimo še, da je polinom $x^2+a_jx+b_j$ nerazcepen v realnem, saj sta $y_j,\overline{y_j}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ njegovi ničli.

Kvocient $\frac{r(x)}{q(x)}$ lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{q(x)} &= \left(\frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\right)+ \\ &\quad +\left(\frac{A_{21}}{x-x_2}+\frac{A_{22}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}\right)+ \\ &\quad +\ldots+ \\ &\quad +\left(\frac{A_{n1}}{x-x_n}+\frac{A_{n2}}{(x-x_n)^2}+\ldots+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}\right)+ \\ &\quad +\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+a_1x+b_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+a_1x+b_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1}}\right)+ \\ &\quad +\ldots+ \\ &\quad +\left(\frac{B_{m1}x+C_{m1}}{x^2+a_mx+b_m}+\frac{B_{m2}x+C_{m2}}{(x^2+a_mx+b_m)^2}+\ldots+\frac{B_{m\beta_m}x+C_{m\beta_m}}{(x^2+a_mx+b_m)^{\beta_m}}\right),\end{aligned}$$

kjer so A_{ij}, B_{ij} in C_{ij} neznani koeficienti. Ko gornjo enakost pomnožimo s $q(x)$ in odpravimo vse ulomke, dobimo enakost $r(x)=s(x)$, kjer je s polinom, katerega stopnja je

manjša od stopnje polinoma q. Neznani koeficienti A_{ij}, B_{ij} in C_{ij} nastopajo kot koeficienti polinoma s. Ko izenačimo istoležne koeficiente polinoma s z istoležnimi koeficienti polinoma r, dobimo sistem enačb. Dokazati je možno, da je ta sistem vedno enolično rešljiv. Torej nam preostane le še, da pokažemo kako izračunamo integral vsakega člena posebej.

Zgled 152 *Izračunaj* $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$.

Rešitev. Ker stopnja polinoma v števcu ni manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, lahko delno delimo: $x^5 = (x^3-1)x^2 + x^2$. Torej je

$$\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln(x^3-1).$$

Zgled 153 *Izračunaj* $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$.

Rešitev. Ker je $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, napravimo razcep

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ko odpravimo ulomke, dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) = \\ &= x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + 1(A-B-D). \end{aligned}$$

Ko izenačimo koeficiente na levi in desni strani, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 && (20)\\ A-B+D &= 0 && (21)\\ A+B-C &= 0 && (22)\\ A-B-D &= 1. && (23) \end{aligned}$$

Iz (20) in (22) sledi $C = 0$, iz (21) in (23) pa $D = -\frac{1}{2}$. Preostali enačbi dasta $A = \frac{1}{4}$ in $B = -\frac{1}{4}$. Sledi

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Torej je

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\arc\tan x.$$

Integrale oblike $\int \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\,dx$ smo že izračunali:

$$\int \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\,dx = \begin{cases} \dfrac{A_{ij}}{(1-j)(x-x_i)^{j-1}}, & \text{če } j \neq 1,\\ A_{ij}\ln(x-x_i), & \text{če } j = 1. \end{cases}$$

Tu smo si pomagali z zamenjavo $t = x - x_i$.

Integrale oblike $\int \frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2-a_ix+b_i)^j}\,dx$ pa bomo v nadaljevanju izračunali le v primeru, ko je $j=1$. (Tj. v primeru, ko polinom q nima pravih kompleksnih ničel višje stopnje.)
Izračunajmo $\int \frac{Bx+C}{x^2+ax+b}$, kjer je polinom x^2+ax+b nerazcepen v realnem; tj. $a^2-4b<0$. Izraz $\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}$ preoblikujemo v

$$\frac{Bx+C}{x^2+ax+b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B(2x+a)}{x^2+ax+b}+\frac{C-\frac{1}{2}aB}{x^2+ax+b}.$$

Torej je

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+ax+b}\,dx=\frac{B}{2}\ln(x^2+ax+b)+\frac{C-\frac{1}{2}aB}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{2}}}.$$

Pri zadnjem integralu smo si pomagali s substitucijo $x+p=qx$, ki nam da

$$\int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}\,dx=\frac{1}{q}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{q}\arctan t=\frac{1}{q}\arctan\frac{x+p}{q}.$$

Zgled 154 *Izračunaj* $\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx$.

Rešitev. Razcep na parcialne ulomke da

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}.$$

Dobimo $x+1=A(x+2)+B(x-3)$ oz. $A+B=1$, $2A-3B=1$, kar nam da $A=\frac{4}{5}$, $B=\frac{1}{5}$. Sledi

$$\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx=\frac{4}{5}\ln(x-3)+\frac{1}{5}\ln(x+2).$$

Zgled 155 *Izračunaj* $\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx$.

Rešitev. Delno deljenje: $2x^3=(x^2+2x+2)(2x-4)+(4x+8)$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx &= \int(2x-4)\,dx+\int\frac{4x+8}{x^2+2x+2}\,dx.=\\ &= (x^2-2x)+\int\frac{2(2x+2)}{x^2+2x+4}\,dx+\int\frac{4}{(x+1)^2+1}\,dx=\\ &= (x^2-2x)+2\ln(x^2+2x+2)+4\arctan(x+1).\end{aligned}$$

Zgled 156 *Izračunaj* $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$.

Rešitev. Ker je $x^4-x^2=x^2(x-1)(x+1)$, napravimo razcep

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}.$$

Ko odpravimo ulomke, dobimo

$$\begin{aligned}x^2+1 &= Ax(x^2-1)+B(x^2-1)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1)=\\ &= x^3(A+C+D)+x^2(B+C-D)+x(-A)+1(-B).\end{aligned}$$

Ko izenačimo koeficiente na levi in desni strani, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} A + C + D &= 0 \\ B + C - D &= 1 \\ -A &= 0 \\ -B &= 1. \end{aligned}$$

Torej je $A = 0$ in $B = -1$ ter od tod $C + D = 0$ in $C - D = 2$, kar nam da $C = 1$ in $D = -1$. Sledi

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Torej je

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx = \frac{1}{x} + \ln(x-1) - \ln(x+1).$$

Integracija trigonometričnih funkcij Integral oblike $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, kjer je R racionalna funkcija, lahko z univerzalno trigonometrijsko substitucijo prevedemo v integral racionalne funkcije, ki ga vsaj načeloma znamo izračunati. Pišimo

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Tedaj je $dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,dx$, od koder sledi

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Velja še

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$. Velja še

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Zgled 157 *Izračunaj* $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $t = \tan\frac{x}{2}$. Tedaj je $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t = \ln\tan\frac{x}{2} + C$. ■

Zgled 158 *Izračunaj integral* $\int \frac{1}{\cos x+2}\,dx$.

Rešitev. Pišimo $t = \tan\frac{x}{2}$. Tedaj je $\int \frac{1}{\cos x+2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$ ■

Integrale oblike $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, kjer sta celi števili, lahko v primeru, ko je m ali n liho število, uženemo s primerno zamenjavo. Če je m liho število, postavimo $t = \cos x$. Če je n liho, postavimo $t = \sin x$. Če sta obe števili lihi, sta obe zamenjavi primerni. Če pa sta obe števili sodi, moramo najprej z ustreznimi trigonometričnimi prijemi znižati red.

Zgled 159 *Izračunaj* $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$.

Rešitev. Če pišemo $t = \cos x$, $dt = \sin x\,dx$, lahko izračunamo

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx &= -\int t^3(1-t^2)\,dt = -\int t^3\,dt + \int t^5\,dt = \\ &= -\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C.\end{aligned}$$

Zgled 160 *Izračunaj* $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

Rešitev. Računajmo $\sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{4}\frac{1-\cos(4x)}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$. Torej je $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos(4x))\,dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$ ■

Integracija korenskih funkcij Integral iracionalne funkcije, v katerih nastopajo izrazi $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ali $\sqrt{a^2-x^2}$, najprej z ustrezno trigonometrično zamenjavo prevedemo na integral racionalne trigonometrične funkcije.

- Če v integralu nastopa $\sqrt{a^2-x^2}$, sta $x = a\sin t$ ali $x = a\cos t$ primerni zamenjavi.
- Če v integralu nastopa $\sqrt{x^2+a^2}$, je $x = a\tan t$ primerna zamenjava.
- Če v integralu nastopa $\sqrt{x^2-a^2}$ sta $x = \frac{a}{\sin t}$ ali $x = \frac{a}{\cos t}$ primerni zamenjavi.

Zgled 161 *Izračunaj* $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Rešitev. Vpeljimo $x = a\sin t$. Tedaj je $dx = a\cos t\,dt$ in $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos(2t))\,dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin(2t))$. Ker je $t = \arcsin\frac{x}{a}$, lahko zapišemo $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} = 2\frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2}.\end{aligned}$$

Zgled 162 *Izračunaj* $\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$.

Rešitev. Vpeljimo $x = a\tan t$. Tedaj je $dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt$ in

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a^2\tan^2 t\frac{a}{\cos t}}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt.$$

Če sedaj pišemo $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$, izračunamo $\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = \int \frac{1}{u^2}\, du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin t}$. Ker je $\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$, velja

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\tan t \cdot \cos t} = \frac{\sqrt{\tan^2 t + 1}}{\tan t} = \frac{a}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

Torej je

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2\, x}.$$

5.2 Določeni integral

Naj bo $[a, b]$ poljuben zaprt interval in $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Radi bi izračunali ploščino lika med abscisno osjo in grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$. Približno lahko ploščino lika izračunamo tako, da ga razrežemo na navpične trakove. Čim ožji so trakovi, tem boljša je aproksimacija za ploščino. Pričakovati je, da bomo najbolj natančen rezultat dobili v limiti, ko gredo širine trakov proti 0.

Vzemimo na intervalu $[a, b]$ končno zaporedje točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

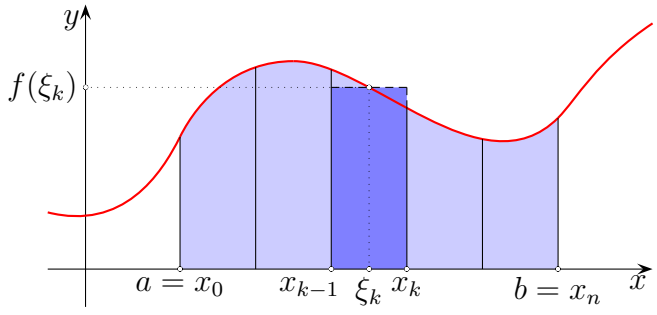
Te točke razdelijo interval na n podintervalov. Njihove dolžine $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ so lahko različne. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z Δ. Torej je

$$\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}.$$

Nadalje naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ poljubna točka. Izraz

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

imenujemo *Riemannova* oz. *integralska vsota* funkcije f pri dani delitvi D intervala $[a, b]$ na podintervale.



Število I imenujemo *določeni integral funkcije f na intervalu* $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $\Delta < \delta$ sledi $|I - \sigma| < \varepsilon$. Če tako število I obstaja, pravimo, da je f *integrabilna na intervalu* $[a, b]$ in označimo $I = \int_a^b f(x)\, dx$. Interval $[a, b]$ imenujemo *integracijski interval*, števili a in b *spodnja* in *zgornja meja* integracije, x pa *integracijska spremenljivka*.

Definicijo določenega intervala lahko povemo tudi drugače. Število I je določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, če se od njega ločijo integralske vsote funkcije f za vse zadosti drobne delitve intervala $[a,b]$ tako malo, kot hočemo. Zapisati smemo tudi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Dokazati je možno, da vse dovolj "lepe" funkcije premorejo določeni integral. Natančneje:

Izrek 77 *Če je $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, je tudi integrabilna na intervalu $[a,b]$.*

Zgled 163 *Izračunaj $\int_a^b x\,dx$.*

Rešitev. Naj bo $f(x) = x$. Razdelimo interval $[a,b]$ na n podintervalov z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Za točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ vzemimo kar sredino ustreznega intervala: $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),\end{aligned}$$

saj se v tej vsoti vsi vmesni členi odštejejo. Ker je funkcija f zvezna, je integrabilna (izrek 77), zato je limita

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

neodvisna od izbire delilnih točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Sledi $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. ■

Geometrijski pomen integrala Naj bo f na intervalu $[a,b]$ zvezna in nikjer negativna. Graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, omejujeta lik T, ki ga imenujemo *krivočrtni trazpez*. Določimo njegovo ploščino.

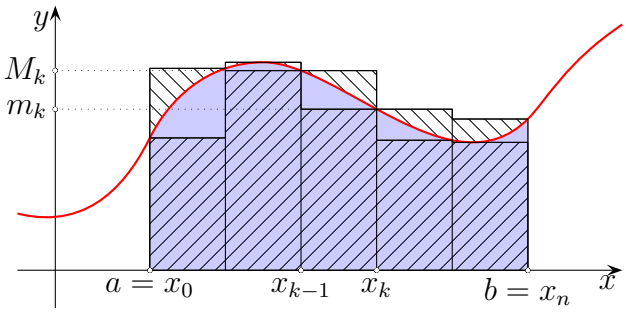
Razdelimo interval $[a,b]$ na podintervale z delilnimi točkami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ in označimo $\Delta = \max\{x_k - x_{k-1};\ k = 1,2,\ldots,n\}$. Za vsak k označimo z m_k in M_k natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo funkcije f na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Narišimo nad vsakim intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ pravokotnik z višino m_k. Tedaj je

$$\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le S(T).$$

Število $\underline{S}(T)$ imenujemo *spodnja integralska vsota* za f na intervalu $[a,b]$. Podobno lahko narišemo nad vsakim intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ pravokotnik z višino M_k. Tedaj je

$$\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \ge S(T).$$

Število $\overline{S}(T)$ imenujemo *zgornja integralska vsota* za f na intervalu $[a,b]$.

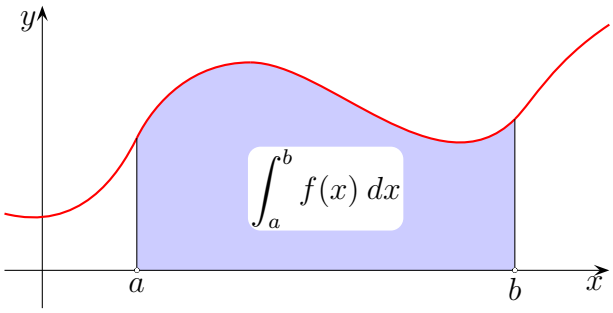


Ker je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, je integrabilna in je zato

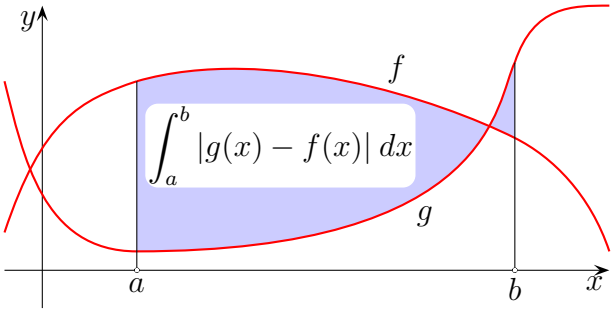
$$\lim_{\Delta \to 0} \underline{S}(T) = \lim_{\Delta \to 0} \overline{S}(T) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ker pa je $\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \overline{S}(T)$, od tod sledi $S(T) = \int_a^b f(x)\, dx$ in je število $S(T)$ neodvisno od delitve intervala $[a, b]$ na podintervale. Torej smo dokazali:

Izrek 78 *Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna, je ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$, enaka $\int_a^b f(x)\, dx$.*



Posledica 79 *Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij f in g na intervalu $[a, b]$ je enaka $\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$.*



Lastnosti določenega integrala

Izrek 80 *Če sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$, α in β pa poljubni realni števili, je funkcija h, $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, tudi integrabilna na intervalu $[a, b]$ in velja*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dokaz. Naj bo D katerakoli delitev intervala $[a,b]$. Potem je integralska vsota za funkcijo h enaka

$$\sigma(h) = \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(x_k - x_{k-1}).$$

Če je delitev intervala dovolj drobna, je vrednost desne strani poljubno blizu števila $\alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$, leva pa blizu $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$. Torej je res

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Izrek 81 *Če je f na intervalu $[a,b]$ zvezna in $c \in (a,b)$ poljubno število, je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Ker je funkcija f zvezna na $[a,b]$, je zvezna tudi na intervalih $[a,c]$ in $[c,b]$, zato integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$ obstajata. Vzemimo sedaj tako delitev $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a,b]$, da je v njej c delilna točka – torej $c = x_m$ za neki m, $1 < m < n$. Tedaj je

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Od tod sledi gornja zveza, ko gredo dolžine vseh delilnih podintervalov k 0. ■

Izrek 82 *Če v integralu zamenjamo meji, spremeni predznak:* $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Dokaz. Če zamenjamo meji, je treba vse razlike $x_k - x_{k-1}$ nadomestiti z razlikami $x_{k-1} - x_k = -(x_k - x_{k-1})$, zato dobi vsak člen v integralski vsoti nasproten predznak. ■

Posledica 83 *Velja* $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Dokaz. Po gornjem izreku je $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$, torej je $2\int_a^a f(x)\,dx = 0$ oz. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Izrek 84 (Izrek o povprečni vrednosti) *Naj bosta m in M natančna spodnja in zgornja meja funkcije f na intervalu $[a,b]$. Potem obstaja točka $p \in [m,M]$, da je*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = p.$$

Če je f na intervalu $[a,b]$ zvezna, obstaja taka točka $\xi \in [a,b]$, da je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Dokaz. Ker je $m \le f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$, lahko integralsko vsoto za f ocenimo:

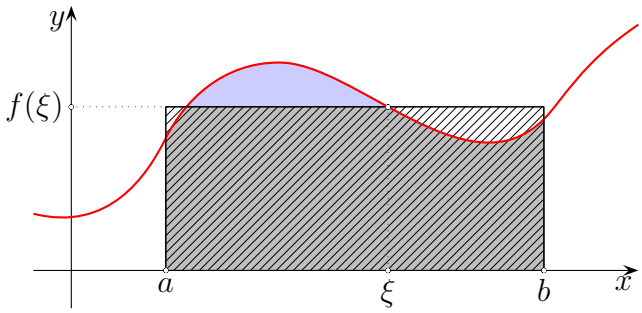
$$m(b-a) = \sum_{k=1}^{m} m(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{m} M(x_k - x_{k-1}) = M(b-a).$$

Torej je

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M$$

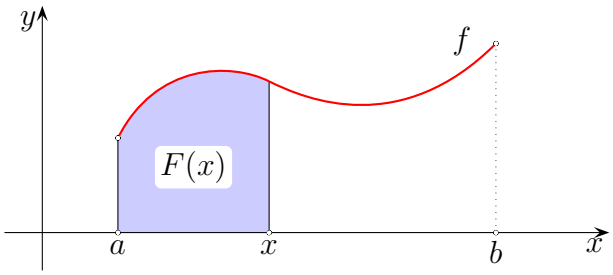
in je res $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = p$ za neko število $p \in [m,M]$. Če je f zvezna funkcija, zavzame vse vrednosti med svojo najmanjšo in svojo največjo vrednostjo, zato obstaja ξ, da je $f(\xi) = p$ oz.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$



5.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

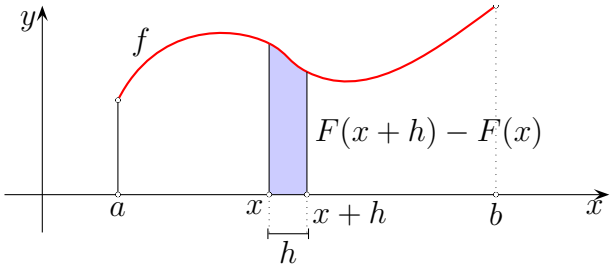
Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj je za vsak $x \in [a,b]$ funkcija F, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, dobro definirana.



Izrek 85 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, je funkcija F, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, zvezna.*

Dokaz. Ker je $F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt$ in $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$



Po izreku o povprečni vrednosti je $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)h$ za neko število ξ med x in $x+h$. Število $f(\xi)$ leži med m in M, kjer sta m in M najmanjša in največja vrednost funkcije f na intervalu $[a,b]$. Torej je

$$|F(x+h) - F(x)| = |f(\xi)h| \le |h| \max\{|m|, |M|\}.$$

Torej je za majhne h sprememba $F(x+h) - F(x)$ poljubno majhna. ■

Izrek 86 *Če je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je funkcija F, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a,b)$.*

Dokaz. Ker je f zvezna, obstaja točka ξ med x in $x+h$, da je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)h.$$

Torej je $f(\xi) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Ko gre $h \to 0$, gre tudi $\xi \to x$, zato je $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h} = f(x)$. Sledi $F'(x) = f(x)$. ■

Izrek 87 (Osnovni izrek infitenzimalnega računa) *Določeni integral zvezne funkcije je kot funkcija zgornje meje nedoločeni integral funkcije pod integralskim znakom.*

Dokaz. Ker je $F'(x) = f(x)$, se funkciji $F(x)$ in $\int_a^x f(t)\,dt$ razlikujeta za konstanto. Torej $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$. Ker je $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, je $C = F(a)$. Sledi $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - C = F(x) - F(a)$. ■

Gornji izrek lahko povemo tudi drugače. Če je F katerikoli nedoločeni integral funkcije f, za določeni integral velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pogosto pišemo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ali celo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^b = F(b) - F(a),$$

če v integralu nastopa več parametrov.

Računanje določenega integrala Pri računanju določenega integrala si najpogosteje pomagamo s prejšnjim izrekom in najprej izračunamo nedoločeni intagral.

Zgled 164 *Izračunaj* $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$.

Nedoločeni integral je

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3.$$

Torej je

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) = 3.$$

Zgled 165 *Izračunaj* $\int_{1}^{4} (x^2 - 2x)\,dx$.

Rešitev. Računajmo $\int_{1}^{4} (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{1}^{4} = (\frac{1}{3}\cdot 4^3 - 4^2) - (\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1^2) = 6.$ ■

Zgled 166 *Izračunaj* $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$.

Rešitev. Ker je $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, zapišemo $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$ in od tod

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

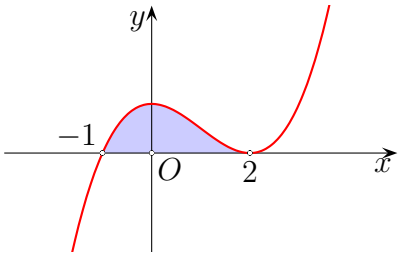
Opozorilo. Pri uporabi izreka 87 moramo biti pazljivi. Za $\int f(x)\,dx = F(x)$ res velja $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, a ne smemo spregledati pogoja, da mora biti funkcija f na intervalu $[a, b]$ integrabilna. Tako je npr. račun

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

očitno **napačen**, saj je podintegralska funkcija pozitivna, integral pa negativen. Težava se skriva v tem, da funkcija F, $F(x) = -\frac{1}{x}$, **ni nedoločeni** integral funkcije f, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, na intervalu $[-1, 2]$, saj na tem intervalu povsod niti definirana ni.

Enostavni zgledi

Zgled 167 *Določi ploščino območja, ki ga graf polinoma* $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-2)^2$ *oklepa z abscisno osjo.*



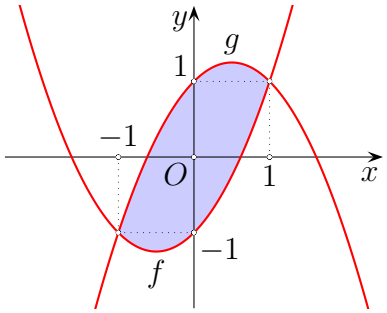
Območje je omejeno z grafom funkcije f na intervalu $[-1, 2]$ in odsekom abscisne osi. Torej je

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 4)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} = \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - (-1)^3 + 4\cdot(-1)\right)\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(4 - \left(-\frac{11}{4}\right)\right) = \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

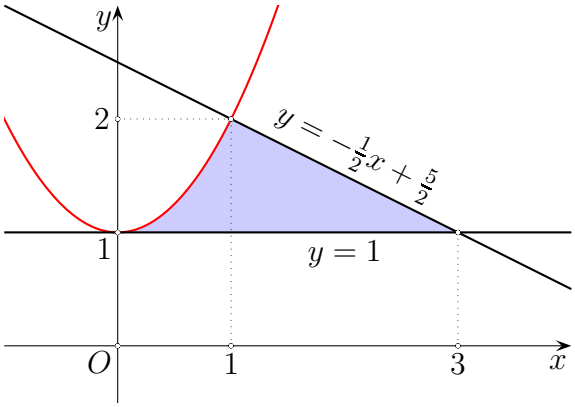
Zgled 168 *Določi ploščino območja, ki ga omejujeta grafa funkcij, podanih s predpisoma* $f(x) = x^2 + x - 1$ *in* $g(x) = -x^2 + x + 1$.

Določimo najprej presečišča krivulj: $x^2 + x - 1 = -x^2 + x + 1$, kar nam da $2x^2 = 2$ oz. $x = \pm 1$. Sledi

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\,dx = \\ &= \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - (-\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



Zgled 169 *Naj bo* $f(x) = x^2 + 1$. *Določi ploščino območja, ki ga določajo graf funkcije* f, *tangenta na graf funkcije* f *v točki* $(0, 1)$ *in normala na graf funkcije v točki* $(1, 2)$.



Ker je $f(x) = x^2 + 1$, je $f'(x) = 2x$. Torej je $f'(0) = 0$ in $f'(1) = 2$. Enačba tangente v točki $(0, 0)$ je $y = 0$, saj je ta točka stacionarna. Enačba normale v točki $(1, 2)$ je $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, kar lahko zapišemo kot $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Premici $y = 1$ in $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ se sekata v točki $(3, 1)$. Torej je iskana ploščina enaka

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 ((x^2+1) - 1)\,dx + \int_1^3 ((-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}) - 1)\,dx = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{4}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

Pravilo zamenjave v določeni integral Pri računanju nedoločenega integrala si pogosto pomagamo s pravilom zamenjave. Če pišemo $x = g(t)$, velja $\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = G(t) = F(x)$, kjer smo v funkciji G zamenjali $t = g^{-1}(x)$. Ravno ta korak pa je pogosto v praksi težko izvedljiv ali pa vsaj računsko neugoden, saj to pomeni, da moramo izračunati tudi inverz g^{-1}. Pri zamenjavi v določeni integral pa zadnji korak ni potreben, saj lahko meje sproti transformiramo. Velja izrek

Izrek 88 (Pravilo zamenjave v določeni integral) *Naj bo $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ zvezna, monotona in odvedljiva funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt,$$

kjer smo označili $a = g(\alpha)$ in $b = g(\beta)$.

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Tedaj je

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g(t))|_\alpha^\beta = F(g(\alpha)) - F(g(\beta)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

kjer potrebujemo monotonost funkcije g zato, da je $g\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijekcija. $\blacksquare$

Zgled 170 *Izračunaj* $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Rešitev. V zgledu 161 smo s pomočjo izreka 73 o zamenjavi v nedoločeni integral izračunali $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2}$, torej je

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left(\frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{2}a^2 \arcsin 1 = \frac{\pi}{4}a^2.$$

S pomočjo izreka 88 pa pri zamenjavi $x = a\sin t$ izračunamo

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

Zgled 171 *Izračunaj* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t = e^x$, $dt = e^x\,dx$. Sledi $dx = t^{-1}\,dt$. Tedaj je

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t+t^{-1}}t^{-1}dt = \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\,dt = (\arctan t)\Big|_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

■

Opozorilo. Pri uporabi pravila zamenjave v določeni integral moramo biti nadvse previdni. Najpomembneje je, da za zamenjavo uporabimo **bijektivno** funkcijo.

Substitucija $t = \sin x$ v integral $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x dx$ očitno nima smisla, saj bi dobili $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^0 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$, kar ne drži, saj je $\sin^2 x > 0$ na intervalu $(0,\pi)$.
Za izračun določenega integrala si lahko pomagamo tudi z metodo za integracijo po delih. Velja namreč

Izrek 89 (Integracija po delih) *Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a,b]$, velja*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Dokaz. Ker za $H(x) = f(x)g(x)$ velja $H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, je $H(x) = \int (f(x)g'(x) + \int g(x)f'(x))\,dx$. Torej je

$$H(b) - H(a) = \int_a^b (f(x)g'(x) + g(x)f'(x))\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= H(b) - H(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx = \\ &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Zgled 172 *Izračunaj* $\int_0^\pi x \sin x \, dx$.

Ker gre za integral oblike $\int p(x) \sin x \, dx$, kjer je $p(x) = x$ polinom, je pri integraciji po delih ugodno polinom odvajati, trigonometrično funkcijo poleg njega pa integrirati. Torej

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \pi,$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali $u = x$, $dv = \sin x \, dx$ in $du = dx$, $v = -\cos x$. ■

Zgled 173 *Izračunaj* $\int_{-1}^1 x \, e^x \, dx$.

Ker gre za integral oblike $\int p(x) e^x \, dx$, kjer je $p(x) = x$ polinom, je pri integraciji po delih ugodno polinom odvajati, eksponentno funkcijo poleg njega pa integrirati. Torej

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x \, e^x \, dx &= (x \, e^x)\big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x \, dx = \big((e + e^{-1}) - e^x\big)\big|_{-1}^1 = \\ &= (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}, \end{aligned}$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali $u = x$, $dv = e^x \, dx$ in $du = dx$, $v = e^x$. ■

Zgled 174 *Izračunaj* $\int_1^2 x(\ln x + 1) \, dx$.

Rešitev. Integral lahko zapišemo kot vsoto dveh integralov:

$$\int_1^2 x(\ln x + 1) \, dx = \int_1^2 x \ln x \, dx + \int_1^2 x \, dx.$$

Očitno je $\int_1^2 x \, dx = \frac{1}{2}x^2\big|_1^2 = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$. Za izračun integrala $\int_1^2 x \ln x \, dx$ pa uporabimo integracijo po delih. Za $du = xdx$, $v = \ln x$ velja $u = \frac{1}{2}x^2$, $dv = \frac{1}{x} dx$ in $\int_1^2 x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x\big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{4}x^2\big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. Torej je

$$\int_1^2 x(\ln x + 1) \, dx = (2 \ln 2 - \frac{3}{4}) + \frac{3}{2} = 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

Posplošeni integral Pri definiciji določenega integrala smo zahtevali, da je integracijsko območje zaprt (torej tudi končen) interval, funkcija, ki jo integriramo, pa na njem omejena. V tem razdelku bomo razširili pojem določenega integrala na primer, ko kakšen od gornjih privzetkov ni izpolnjen. Take integrale imenujemo *posplošene* oz. *izlimitirane*.

Vzemimo najprej primer, ko funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ni omejena in ima natanko en pol na intervalu $[a, b]$.

Recimo, da ima f pol v točki b, sicer pa je na intervalu $[a, b)$ omejena. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja integral $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx$. Če obstaja $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx$, označimo

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx.$$

Če ima f pol v točki a, definiramo $\int_a^b f(x)\,dx$ podobno. Če obstaja $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Če ima funkcija f pol v kakšni točki $c \in (a,b)$, integracijsko območje razdelimo na dva dela. Če obstajata integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$, označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Opozorilo. Limiti $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ in $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ ne smemo združiti v eno limito, tj. v

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right), \tag{24}$$

saj sta limiti med seboj neodvisni.

Zgled 175 *Ali obstaja posplošeni integral* $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^3}\,dx$*?*

Ker funkcija f, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, ni definirana v točki 0, moramo zapisati

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx,$$

kjer zahtevamo, da oba integrala na desni strani obstajata. Po definiciji je $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim\limits_{e\downarrow 0}\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\,dx$, če ta integral sploh obstaja. Računajmo $\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}|_{-2}^{-\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8}$. Ker limita $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8})$ ne obstaja, funkcija f ni integrabilna na intervalu $[-2,0]$, torej tudi ne na večjem intervalu $[-2,1]$.

Pripomniti pa velja, da bi s pomočjo limite 24 prišli do napačne ugotovitve. Velja namreč $\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}|_{0+\varepsilon}^1 = -1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}$ in od tod dobimo

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\left(-1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) + \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{8}\right)\right) = -\frac{7}{8}.$$

Slednje pa seveda ni enako vrednosti integrala $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^3}\,dx$, sa le-ta ne obstaja.
Gornji primer torej kaže, da lahko obstaja limita

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right),$$

čeprav ne obstaja izlimirani integral $\int_a^b f(x)\,dx$. V tem primeru pravimo, da obstaja *Cauchyjeva glavna vrednost* integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Zgled 176 *Izračunaj* $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$*.*

Rešitev. Ker funkcija f, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$, ni definirana v točki $x = 2$, je

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx,$$

če integral na desni obstaja. Ker je

$$\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-1/2}\,dx = 2(2-x)^{+1/2}\big|_0^{2-\varepsilon} = 2\varepsilon^{1/2} - 2\sqrt{2},$$

velja

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2\varepsilon^{1/2} - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

Zgled 177 *Izračunaj* $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *za različne vrednosti parametra* α.

Rešitev. Po definiciji je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Če je $\alpha = 1$, imamo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon$, vendar v tem primeru

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\ln\varepsilon$$

ne obstaja. Če pa je $\alpha \neq 1$,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Ker pa limita $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{1-\alpha}$ obstaja le za $\alpha < 1$, obstaja integral le za $\alpha < 1$ in v tem primeru velja

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

■

Zgled 178 *Izračunaj* $\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx$.

Rešitev. Ker funkcija f, $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, ni definirana v točki $x = 0$, moramo pisati

$$\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx.$$

Oba integrala na desni strani obstajata, saj ustrezata pogojem prejšnje naloge pri $\alpha = \frac{2}{3}$. Računajmo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx &= \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^8 x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3x^{1/3}|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3x^{1/3}|_\varepsilon^8 = \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3(-\varepsilon^{1/3}+1) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 3(2-\varepsilon^{1/3}) = 3+6 = 9.
\end{aligned}$$

Zgled 179 *Izračunaj* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Rešitev. Po definiciji je

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ker pa je $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$, lahko izračunamo.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \arcsin x|_\varepsilon^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Doslej smo se ukvarjali le z integrali neomejenih funkcij na končnih intervalih. Zdaj pa vzemimo, da je integracijski interval neomejen, funkcija pa naj bo na vsakem končnem podintervalu integrabilna (v pravem ali posplošenem smislu).

Če za vsak $b > a$ obstaja integral $\int_a^b f(x)\,dx$ in če obstaja $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, pravimo, da je f integrabilna na intervalu $[a,\infty)$ in označimo

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podobno definiramo integrabilnost na intervalu $(-\infty, b]$. Če za vsak $a < b$ obstaja integral $\int_a^b f(x)dx$ in če obstaja $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, pravimo, da je f integrabilna na intervalu $(-\infty, b]$ in označimo

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nazadnje definiramo še integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. Če je funkcija f integrabilna na vsakem končnem zaprtem intervalu v $(-\infty,\infty)$ in če obstaja limita

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx,$$

pravimo, da je f integrabilna na $(-\infty,\infty)$ in označimo

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Opozoriti velja, da moramo v $\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ izračunati limiti po a in b neodvisno in si računa ne smemo poenostaviti v

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Če pa integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ obstaja, potem velja $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$.

Zgled 180 *Izračunaj* $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *za različne vrednosti parametra* α.

Rešitev. Po definiciji je $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Če je $\alpha = 1$, imamo $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_1^b = \ln b$, vendar v tem primeru $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln b$ ne obstaja.

Če pa je $\alpha \neq 1$, velja $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$. Ker pa limita $\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha}$ obstaja le za $\alpha > 1$, obstaja integral le za $\alpha > 1$ in v tem primeru velja

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Iz zgledov 177 in 180 vidimo, da integral

$$\int_0^\infty x^\alpha\,dx$$

ne obstaja za noben $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zgled 181 *Izračunaj* $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$.

Rešitev. Računajmo $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} e^x|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1$.

Zgled 182 *Ali obstaja* $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$*?*

Rešitev. Integral ne obstaja, saj je

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^\infty = \infty.$$

Zgled 183 *Izračunaj* $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\,dx$. Tedaj je

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2}.$$

Zgled 184 *Izračunaj* $\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Rešitev. Videli smo že, da je $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{4}$. Torej je

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\frac{x^2}{4}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(-\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}\ln\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\bigg|_\varepsilon^1 = -\frac{1}{4},$$

saj je $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2\ln\varepsilon = 0$.

Zgled 185 *Izračunaj* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos x}\,dx$.

Rešitev. Poskusimo z zamenjavo $t = \tan\frac{x}{2}$. Potem je $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ in $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ker funkcija $x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ ni injektivna na intervalu $[0,\pi]$ (pravzaprtav ni niti definirana za $x = \pi$), ne moremo napraviti zamenjave na celem integracijskem intervalu, ampak moramo najprej območje razdeliti na dva dela. Računajmo

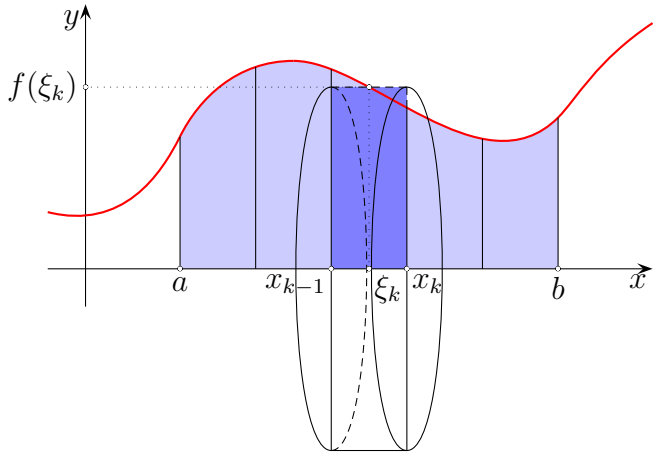
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos x}\,dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{4-3\cos x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos x}\,dx = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+7t^2}\,dt = \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tan}(t\sqrt{7})\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

5.4 Uporaba integrala

Prostornina vrtenine pri vrtenju okoli abscisne osi Izračunati želimo prostornino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a,b]$ pri vrtenju okoli abscisne osi. Vzemimo na intervalu $[a,b]$ končno zaporedje točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Te točke razdelijo interval na n podintervalov. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z Δ. Nadalje naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ poljubna točka. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke navpične rezine – valje.



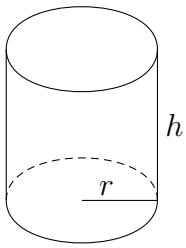
Prostornina posameznega valja je enaka $\pi f^2(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Celotna prostornina telesa pri delitvi D je približno enaka

$$V(D) = \pi \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

in je zato

$$V = \lim_{\Delta\to 0} V(D) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Opomba. Pri izračunu smo uporabili, da je prostornina pokončnega valja s polmerom r osnovne ploskve in višino h enaka $\pi r^2 h$.

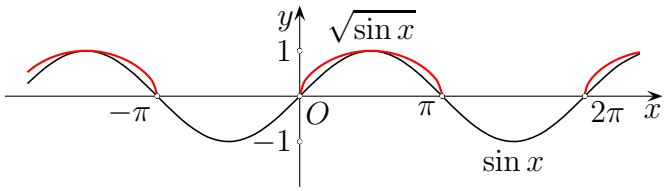


Zgled 186 *Izračunaj prostornino krogle s polmerom r.*

Rešitev. Kroglo v središčni legi si lahko predstavljamo kot vrtenino, ki jo dobimo z vrtenjem krožnega loka z enačbo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[-r, r]$ okoli abscisne osi. Torej je

$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \left(xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Zgled 187 *Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem enega loka grafa funkcije f, podane z enačbo $f(x) = \sqrt{\sin x}$, okoli abscisne osi.*



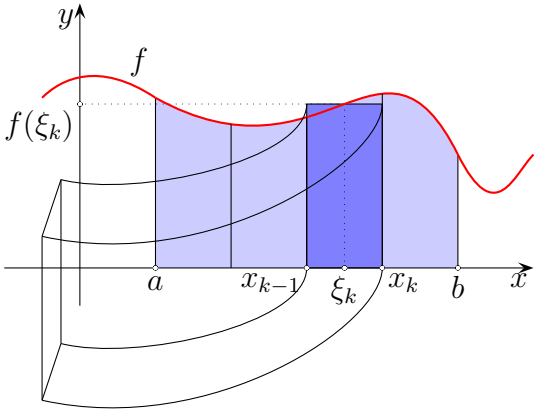
Ker je $\sin x \geq 0$ za $x \in [0, \pi]$, je iskana prostornina enaka

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \pi(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi.$$

Prostornina vrtenine pri vrtenju okoli ordinatne osi Izračunajmo prostornino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$, $0 \notin [a, b]$, pri vrtenju okoli ordinatne osi. Vzemimo na intervalu $[a, b]$ končno zaporedje točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Te točke razdelijo interval na n podintervalov. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z Δ. Nadalje naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ poljubna točka. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke valjaste cevi.



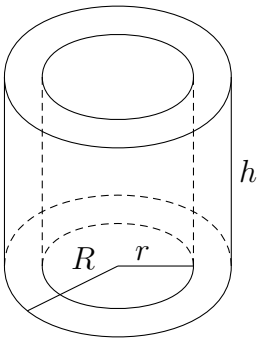
Prostornina posamezne valjaste cevi je enaka $\pi f(\xi_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2)$. Ker je $x_k^2 - x_{k-1}^2 = (x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ in $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, je $x_k + x_{k-1} \approx 2\xi_k$. Torej je prostornina posamezne valjaste cevi približno enaka $2\pi\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Celotna prostornina telesa pri delitvi D je približno enaka

$$V(D) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

in je zato

$$V = \lim_{\Delta \to 0} V(D) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx.$$

Opomba. Pri izračunu smo uporabili, da je prostornina pokončne valjaste cevi z zunanjim polmerom R, notranjim polmerom r in h enaka $\pi(R^2 - r^2)h$.



Zgled 188 *Kolikšna je prostornina telesa, ki ga dobimo, ko graf funkcije* $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ *na intervalu* $[0, 1]$ *zavrtimo okoli ordinatne osi?*

Naj bo $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Potem je prostornina enaka

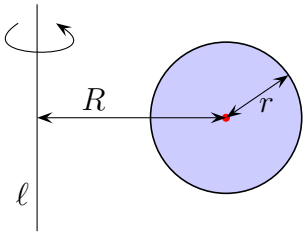
$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Vpeljimo substitucijo $t = x^2 + 1$, $dt = 2x\, dx$. Sledi

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt = -\left.\frac{\pi}{t}\right|_1^2 = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

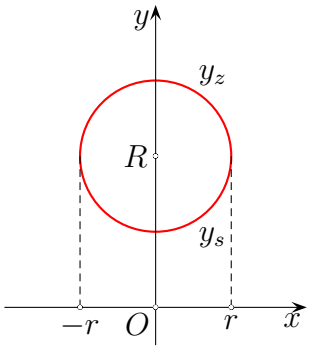
Zgled 189 *Izračunaj prostornino torusa s polmeroma* R *in* r.

Torus nastane tako, da krog/krožnico s polmerom r, katere središče je od premice ℓ oddaljeno R, zavrtimo okoli te premice.



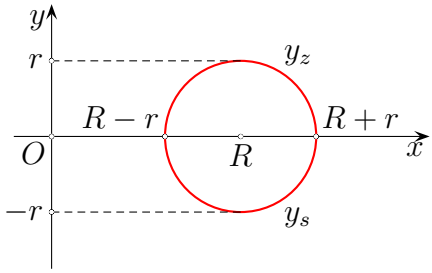
Torej lahko nalogo rešimo na dva načina – z vrtenjem okoli abscisne ali vrtenjem okoli ordinatne osi.

1. način Torus nastane tako, da krožnico z enačbo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ zavrtimo okoli abscisne osi. Sledi $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ in $y_z = R + \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_s = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Prostornina je tako enaka



$$\begin{aligned} V &= V_z - V_s = \pi \int_{-r}^{r} (y_z^2 - y_s^2)\, dx = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (y_z + y_s)(y_z - y_s)\, dx = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} 2R \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \\ &= 4\pi R \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

2. način Torus nastane tudi tako, da krožnico z enačbo $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ zavrtimo okoli ordinatne osi. V tem primeru je

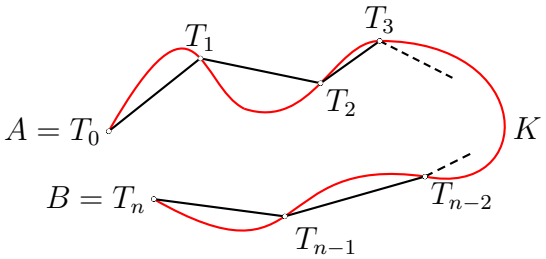


$$\begin{aligned} y_z &= \sqrt{r^2 - (x - R)^2}, \\ y_s &= = -\sqrt{r^2 - (x - R)^2}. \end{aligned}$$

Sledi

$$V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x(y_z - y_s)\, dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2 - (x - R)^2}\, dx = \ldots = 2\pi^2 R r^2.$$

Dolžina ravninske krivulje Naj bo K krivulja v ravnini. Radi bi definirali dolžino krivulje K. Naj bosta A in B krajišči te krivulje. Označimo z D delitev krivulje K z zaporednimi točkami $A = T_0, T_1, \ldots, B = T_n$. Dobimo poligonalno črto, katere dolžino lahko izračunamo: $L(D) = \sum_{k=1}^{n} |T_{k-1}T_k|$.

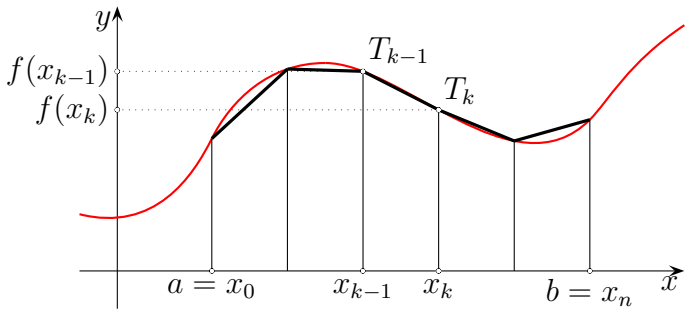


Poligonalna črta $T_0T_1 \ldots T_n$ se loči od krivulje K tem manj, čim krajše so vse daljice v poligonski črti. Še več, krivuljo imamo lahko za limitno obliko poligonalnih črt, ko gredo dolžine vseh daljic proti 0. Torej lahko vzamemo za dolžino L krivulje K kar limito dolžin $L(D)$, ko gredo dolžine vseh daljic proti 0. Če z Δ označimo dolžino najkrajše med njimi, je

$$L = \lim_{\Delta \to 0} L(D).$$

Če gornja limita obstaja, pravimo, da je krivulja *merljiva*.

Naj bo sedaj krivulja K podana z grafom zvezno odvedljive funkcije f na intervalu $[a,b]$. Razdelimo interval z delilnimi točkami $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ na podintervale. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z Δ. Točka T_k ima koordinati $(x_k, f(x_k))$.



Dolžina posameznega odseka lomljenke je enaka $|T_{k-1}T_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$.

Računajmo

$$\begin{aligned} L(D) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\tfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot (x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

kjer smo zapisali $f'(\xi_k) = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ s pomočjo Lagrangeovega izreka. Torej je

$$L = \lim_{\Delta \to 0} L(D) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Zgled 190 *Izračunaj obseg krožnice s polmerom r.*

Rešitev. Ker je krožnica simetrična, zadošča določiti dolžino loka krožnice v I. kvadrantu. Ker je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, je $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Torej je

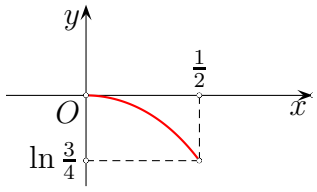
$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^r \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \\ &= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \\ &= r \arcsin 1 = \frac{\pi r}{2}. \end{aligned}$$

Obseg krožnice je torej enak $4 \cdot \frac{\pi r}{2} = 2\pi r$.

Zgled 191 *Izračunaj dolžino loka grafa funkcije $y = \ln(1 - x^2)$ med točkama $x = 0$ in $x = \frac{1}{2}$.*

Naj bo $f(x) = \ln(1-x^2)$. Potem je $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ in dolžina loka je enaka

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+(-2x)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$



Izračunajmo najprej nedoločeni integral $\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$. Ker stopnja polinoma v števcu ni manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, najprej delno delimo:

$$(x^2+1) = (-x^2+1)(-1)+2$$

in od tod

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{-x^2+1} = -1 + \frac{-2}{x^2-1}.$$

S pomočjo razcepa na parcialne ulomke

$$\frac{-2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$$

dobimo $A+B=0$ in $-A+B=-2$. Sledi $A=1$ in $B=-1$. Torej je

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

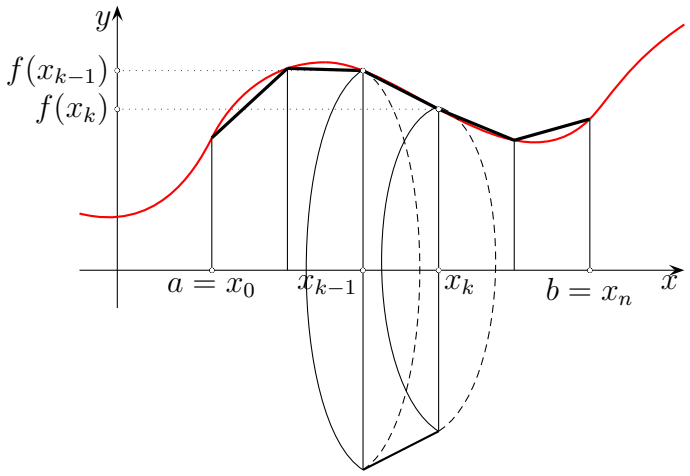
Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx &= \int \left(-1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\,dx = \\ &= -x + \ln|x+1| - \ln|x-1| = -x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\end{aligned}$$

in

$$L = \left(-x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$$

Površina vrtenine Izračunati želimo površino vrtenine, ki jo določa graf pozitivne funkcije f na intervalu $[a,b]$ pri vrtenju okoli abscisne osi. Razdelimo interval z delilnimi točkami $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ na podintervale. Dolžino najdaljšega med njimi označimo z Δ. Telo, ki ga graf določa, razdelimo na tanke navpične rezine – prisekane stožce.



Površina plašča posameznega stožca je enaka

$$\pi(f(x_k)+f(x_{k-1}))\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}.$$

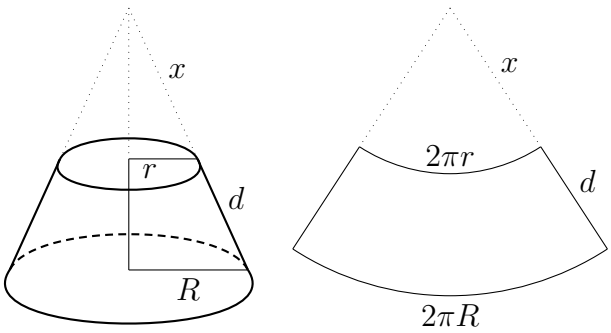
Torej je površina pri delitvi D približno enaka

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{k=1}^{n} 2\pi\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} = \\ &= 2\pi\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot(x_k-x_{k-1}) = \\ &= 2\pi\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot(x_k-x_{k-1}), \end{aligned}$$

kjer smo zapisali $f'(\xi_k)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ s pomočjo Lagrangeovega izreka. Ker je $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$ in je f zvezna, je $\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\approx f(\xi_k)$. Sledi

$$P=\lim_{\Delta\to 0}P(D)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Opomba. Pri izračunu smo uporabili, da plašč prisekanega stožca meri $\pi(R+r)d$, kjer sta r in R polmera osnovnih ploskev, d pa stranska višina.



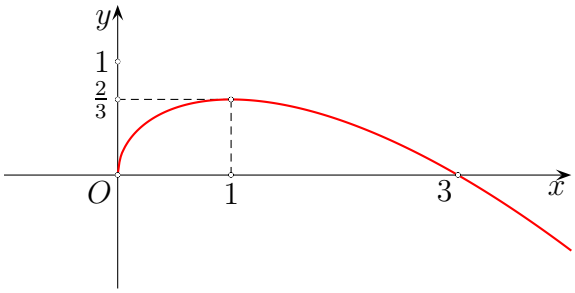
Plašč prisekanega stožca razgrnemo v ravnino in dobimo kolobarjev izsek. Iz podobnosti sledi $x:r=d:(R-r)$ in $x=\frac{rd}{R-r}$. Ploščina kolobarjevega izseka je $p=\pi R(x+d)-\pi rx=\pi(Rd+x(R-r))=\pi(R+r)d$.

Zgled 192 *Izračunaj površino krogle s polmerom r.*

Rešitev. Pri običajni parametrizaciji je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ in $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Torej je

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \\ &= 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Zgled 193 *Izračunaj površino telesa, ki ga določa graf funkcije f, $f(x) = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, na intervalu med njenima ničlama pri vrtenju okoli abscisne osi.*



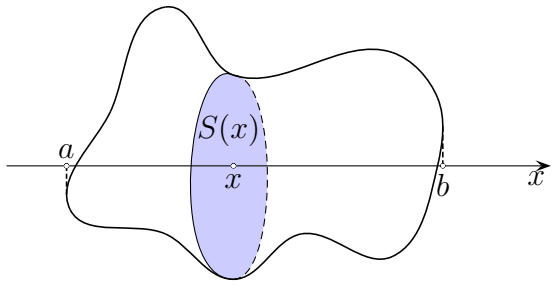
Ker je $f(x) = \dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, je $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$. Sledi

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{(1-x)^2}{4x} = \frac{4x+1-2x+x^2}{4x} = \frac{(1+x)^2}{4x}$$

in od tod

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{4x}}\,dx = \\ &= \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)(x+1)\,dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx = \\ &= \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\Big|_0^3 = 3\pi \end{aligned}$$

Prostornina geometrijskega telesa Dano naj bo geometrijsko telo in številska premica x. Pri dani vrednosti x naj bo $S(x)$ ploščina preseka telesa z ravnino, ki je pravokotna na os x v točki x. Vzemimo še, da je S zvezna funkcija.



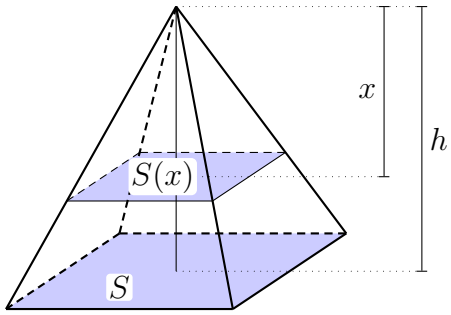
Razdelimo telo z ravninami, pravokotnimi na os x, na rezine. Če je plast med sosednjima presekoma tanka, je prostornina približno enaka $S(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, kjer je $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ poljubna točka. Torej je celotna prostornina približno enaka $V(D) = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Ta približek je tem boljši, čim tanjše so rezine, tj. čim krajši so delilni intervali. Torej je smiselno postaviti $V = \lim_{\Delta \to 0} V(D)$, kjer je Δ dolžina najdaljšega izmed delilnih intervalov. Ker je je S zvezna funkcija, je integrabilna in

$$V = \lim_{\Delta \to 0} V(D) = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Zgled 194 *Izračunaj prostornino piramide s ploščino osnovne ploskve S in višino h.*

Na višini x je ploščina prereza enaka $S(x)$. Torej je $S(x) : S = x^2 : h^2$ in zato $S(x) = \frac{Sx^2}{h^2}$. Sledi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x)\, dx = \\ &= \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}\, dx = \frac{1}{3}Sh. \end{aligned}$$

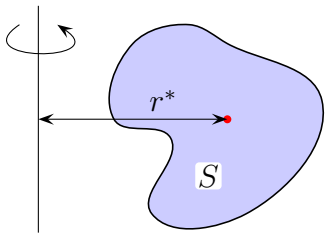


Guldinovi pravili za vrtenine

Prostornina telesa, ki ga dobimo pri vrtenju ploskve S okoli ravne osi, je enaka

$$V = 2\pi r^* p(S),$$

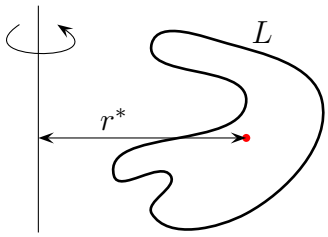
kjer je $p(S)$ ploščina ploskve S, r^* pa oddaljenost težišča ploskve od osi vrtenja.



Površina ploskve, ki jo dobimo pri vrtenju loka L okoli ravne osi, je enaka

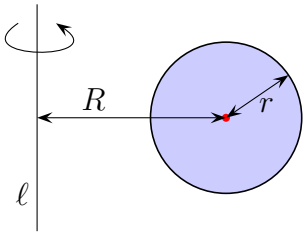
$$P = 2\pi r^* s(L),$$

kjer je $s(L)$ dolžina loka L, r^* pa oddaljenost težišča loka od osi vrtenja.



Zgled 195 *Izračunaj prostornino in površino torusa s polmeroma R in r.*

Rešitev. Torus nastane tako, da krog/krožnico s polmerom r, katere središče je od premice ℓ oddaljeno R, zavrtimo okoli te premice.



Torej je

$$V = 2\pi r^* p(S) = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

in

$$P = 2\pi r^* s(L) = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r R.$$

5.5 Numerično računanje določenih integralov

Izračunati želimo integral $\int_a^b f(x)\,dx$, kjer je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eksplicitno podana pozitivna funkcija. Običajno najprej izračunamo nedoločeni integral $\int f(x)\,dx = F(x)$, nato pa upoštevamo še meje:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

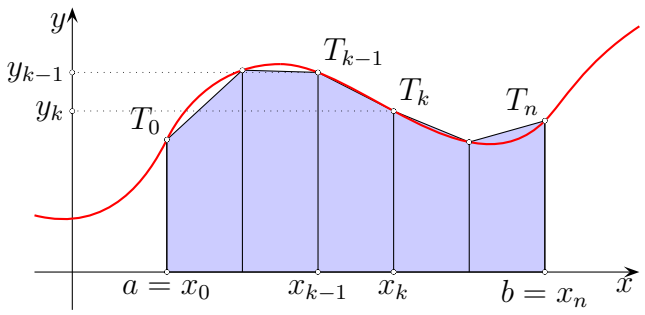
Seveda je ta način uporaben le, če znamo eksplicitno določiti primitivno funkcijo F.

Če primitivne funkcije ne moremo eksplicitno določiti, se moramo zadovoljiti le s približnim numeričnim rezultatom. Da bi bila numerična metoda uporabna, moramo ob tem tudi znati oceniti napako.

Trapezna formula Pri tej metodi nadomestimo funkcijo f z odsekoma linearno funkcijo. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Razdelimo integracijski interval $[a,b]$ na n enakih delov z dolžino $h = \frac{b-a}{n}$. Delilne točke so

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Za $k = 0, 1, \ldots, n$ označimo $y_k = f(x_k)$ in $T_k = T_k(x_k, y_k)$. Lomljena črta skozi točke T_0, T_1, …, T_n predstavlja graf kosoma linearne funkcije $\bar{f}$, ki aproksimira funkcijo f.



Na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ je funkcija $\bar{f}$ podana s predpisom $\bar{f}(x) = y_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})$. Ploščina pod grafom funkcije $\bar{f}$ na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ je tako

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bar{f}(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_{k-1} + y_k).$$

Ko dobljene ploščine seštejemo, dobimo *trapezno formulo*

$$\int_a^b \bar{f}(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Napaka pri tej formuli je enaka

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \bar{f}(x)\,dx.$$

Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f velja

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

kar pomeni, da lahko z večanjem števila n dobimo bolj natančen rezultat.

Zgled 196 *Izračunaj* $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ *na dve decimalni mesti natančno s pomočjo trapezne formule.*

Za izračun na dve decimalni mesti mora veljati $|R_n| < 0.005$. Računajmo: $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ in $f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$. Torej za $x \in [0,1]$ velja $|f''(x)| = |e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)| \le 1$. Sledi

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \le \frac{1}{12n^2} < 0.005,$$

kar nam da $\frac{1}{12n^2} < 0.005$ oz. $n > 4$. Torej postavimo $n = 5$. Po vrsti izračunamo

	0	1	2	3	4	5
x_k	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_k	1	0.9802	0.9231	0.8353	0.7261	0.6065

Približna vrednost integrala je tako enaka

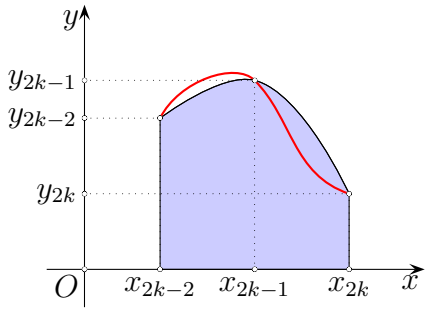
$$\frac{1}{10}(1.0000 + 2\cdot 0.9802 + 2\cdot 0.9231 + 2\cdot 0.8353 + 2\cdot 0.7261 + 0.6065) = 0.85359.$$

Torej je $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0.85359$. Pripomnimo še, da je natančna vrednost enaka $0.85563756\ldots$. ■

Opomba. Dokazati je možno, da integral $\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ ni elementaren, kar pomeni, da ne obstaja elementarna funkcija F, da je $F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Simpsonova formula Pri trapezni formuli smo funkcijo aproksimirali s kosoma linearno. Če namesto kosoma linearne funkcije uporabimo kvadratno funkcijo, je pričakovati, da bo rezultat precej bolj natančen. Razdelimo interval $[a,b]$ na n delov, kjer je n **sodo število**. Označimo $h = \frac{b-a}{n}$.

Za vsak $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ aproksimirajmo funkcijo f na intervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ s kvadratno parabolo $p(x) = ax^2+bx+c$, ki poteka skozi točke (x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}) in (x_{2k}, y_{2k}).



Če premaknemo koordinatno izhodišče v točko $(x_{2k-1}, 0)$, je

$$x_{2k-2} = -h, \qquad x_{2k-1} = 0, \qquad x_{2k} = h$$

in pogoji, da poteka graf polinoma p skozi dane točke, so

$$\begin{aligned} y_{2k-2} &= ah^2 - bh + c \\ y_{2k-1} &= c \\ y_{2k} &= ah^2 + bh + c. \end{aligned}$$

Ploščina pod parabolo p na intervalu $[-h, h]$ je potem enaka

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c).$$

Iz pogojev za a, b in c vidimo, da je

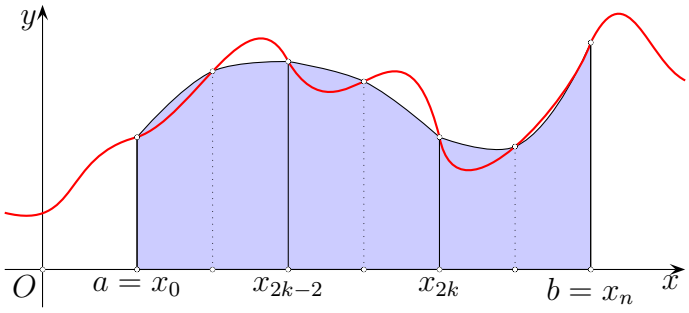
$$2ah^2 + 6c = y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}.$$

Torej smo dokazali, da je ploščina lika pod polinomom p na intervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ enaka

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (ax^2 + bx + c)\, dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Če podobno naredimo še za druge intervale, dobimo kosoma kvadratično funkcijo $\hat{f}$, za katero velja *Simpsonova formula*

$$\int_a^b \hat{f}(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$



Napaka pri tej formuli je enaka

$$R_n = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b \hat{f}(x)\, dx.$$

Za štirikrat zvezno odvedljivo funkcijo f velja

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Opomba. Ker v oceni napake nastopa četrti odvod funkcije f, vidimo, da je Simpsonova formula popolnoma **točna** tudi za polinome stopnje 3.

Zgled 197 *Izračunaj* $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ *na dve decimalni mesti natančno s pomočjo Simpsonove formule.*

Za izračun na dve decimalni mesti mora veljati $|R_n| < 0.005$. Izračunamo: $f^{(4)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4-6x^2+3)$. Prepričamo se lahko, da ima $f^{(4)}(x)$ ima maksimum v $x=0$, minimum pa v $x=\pm\sqrt{3}$. Torej je $|f^{(4)}(x)| \le 3$ za $x \in [0,1]$. Za $n=4$ sledi

$$|R_4| \le \frac{3}{180 \cdot 4^4} \approx 0.000065.$$

Po vrsti izračunamo

	0	1	2	3	4
x_k	0.0	0.25	0.50	0.75	1.0
y_k	1	0.96923	0.882497	0.75484	0.606531

Po Simpsonovi formuli je integral približno enak

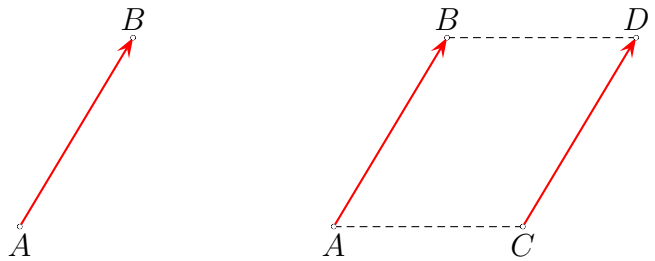
$$\frac{1}{12}(1 + 4 \cdot 0.96923 + 2 \cdot 0.882497 + 4 \cdot 0.75484 + 0.606531) = 0.85565.$$

Torej je $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx 0.85565$ in rezultat je opazno bolj natančen kot pri trapezni formuli.

6 Vektorska algebra

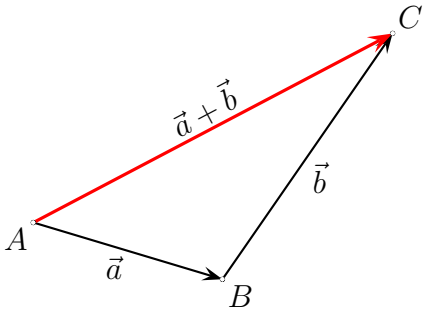
6.1 Vektorji

Urejen par (A, B) točk v prostoru določa *vektor*, ki ga označimo z $\overrightarrow{AB}$. Vektor ponazorimo z usmerjeno daljico od točke A do točke B. Smer vektorja označimo s puščico. Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ določata isti vektor natanko tedaj, ko sta vzporedni, enako dolgi in kažeta v isto smer.



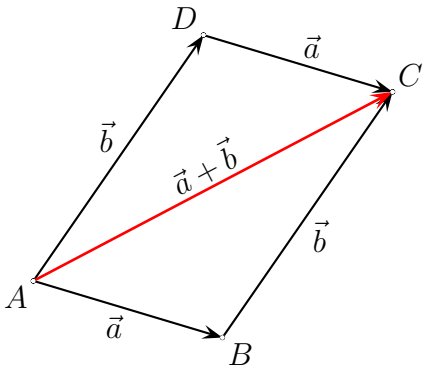
Dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$, z oznako $\|\overrightarrow{AB}\|$, je dolžina daljice AB. Torej $\|\overrightarrow{AB}\| = |AB|$.

Vsota vektorjev Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna vektorja. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lahko premaknemo tako, da konec vektorja $\vec{a}$ sovpada z začetkom vektorja $\vec{b}$. Potem je vektor $\vec{a}+\vec{b}$ usmerjena daljica od začetka vektorja $\vec{a}$ do konca vektorja $\vec{b}$.



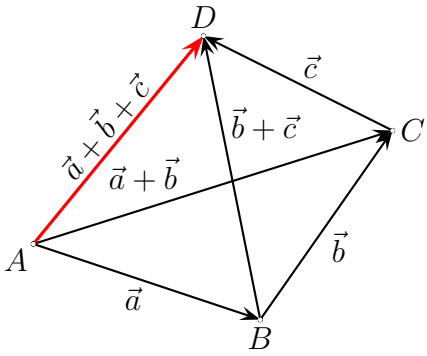
Drugače povedano: če imata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ skupno začetno točko, je njuna vsota $\vec{a}+\vec{b}$ usmerjena diagonala paralelograma, ki ima vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ za stranici, in sicer tista usmerjena diagonala, ki ima začetek v skupni točki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Iz te definicije je tudi razvidno, da je

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$



Vsoto treh vektorjev izračunamo tako, da vsoti dveh prištejemo tretjega. Vrstni red seštevanja ni pomemben, saj za seštevanje vektorjev velja *asociativnostni zakon*.

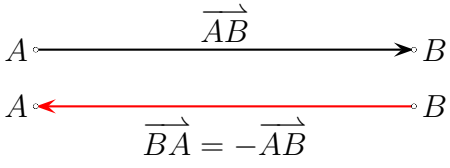
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$



Vektor, ki se začne in konča v isti točki, imenujemo *ničelni vektor* in ga označimo z $\vec{0}$. Za vsak vektor $\vec{a}$ torej velja

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

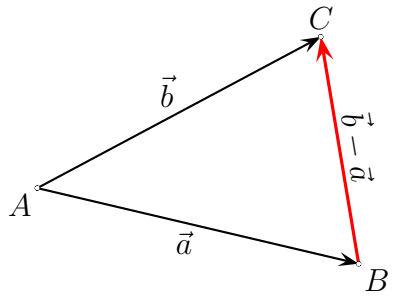
Naj bo $\overrightarrow{AB}$ vektor. Vektor $\overrightarrow{BA}$ je *nasprotni vektor* k vektorju $\overrightarrow{AB}$ in ga označimo z $-\overrightarrow{AB}$.



Nasprotni vektor k vektorju $\vec{a}$ označimo z $-\vec{a}$. Tedaj velja

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je tak vektor $\vec{x}$, da je $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$. Razliko vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ označimo z $\vec{b} - \vec{a}$ in velja $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$.



Povzemimo osnovne lastnosti seštevanja vektorjev.

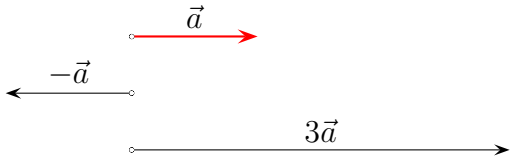
- *Komutativnost seštevanja:*
  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
- *Asociativnost seštevanja:*
  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$
- *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje:*
  Obstaja vektor $\vec{0}$, da je $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$
- *Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje:*
  Za vsak vektor $\vec{a}$ obstaja vektor $-\vec{a}$, da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Te štiri lastnosti povemo na kratko takole: Množica vektorjev je Abelova grupa.

Seštevanje vektorjev zadošča *trikotniški neenakosti*

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

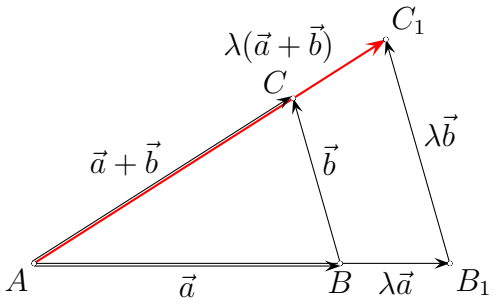
Množenje vektorja s skalarjem Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt $\lambda\vec{a}$ je vektor z dolžino $|\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$. Če je $\lambda > 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $\vec{a}$. Če je $\lambda < 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $-\vec{a}$. Če je $\lambda = 0$, je $\lambda\vec{a}$ ničelni vektor.



Množenje vektorja s skalarjem zadošča zahtevam

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.



Linearna odvisnost in neodvisnost Naj bodo $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ vektorji v prostoru. Izraz

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$$

imenujemo *linearna kombinacija vektorjev* $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$.

Ti vektorji so *linearno neodvisni*, če iz enakosti

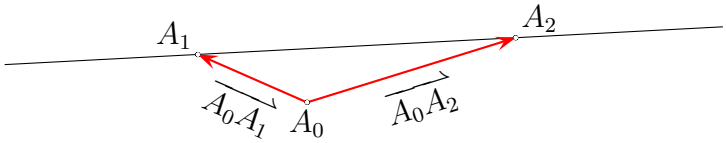
$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

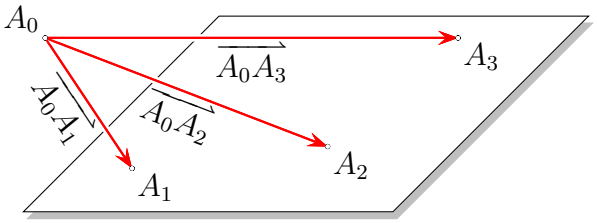
Ti vektorji so *linearno odvisni*, če niso linearno neodvisni. Torej obstajajo števila λ_1, λ_2, ..., λ_n, **ki niso vsa enaka 0**, da je

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}.$$

- Vektor $\vec{0}$ je linearno odvisen, saj je $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Naj bodo A_0, A_1 in A_2 nekolinearne točke v ravnini. Potem sta vektorja $\overrightarrow{A_0A_1}$ in $\overrightarrow{A_0A_2}$ linearno neodvisna.

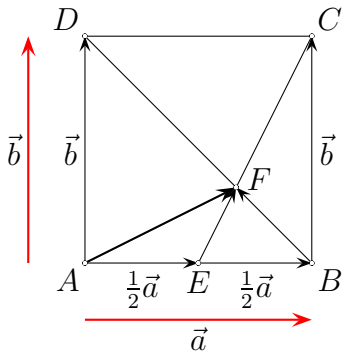


- Naj bodo A_0, A_1, A_2 in A_3 nekomplanarne točke v prostoru. Potem so vektorji $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ in $\overrightarrow{A_0A_3}$ linearno neodvisni.



Zgled 198 *Naj bo točka E razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$. Označimo s F preseščišče daljic BD in CE. V kakšem razmerju deli točka F daljico BD?*

Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Potem sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna. Ker leži točka F na daljici BD, velja $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ in je



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}).$$

Ker leži točka F tudi na daljici EC, velja $\overrightarrow{EF} = \mu\overrightarrow{EC} = \mu(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})$ in je

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \mu(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}).$$

Sledi

$$\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \mu(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}),$$

kar lahko preoblikujemo v

$$\left(\tfrac{1}{2} - \lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right)\vec{a} + (\mu - \lambda)\,\vec{b} = \vec{0}.$$

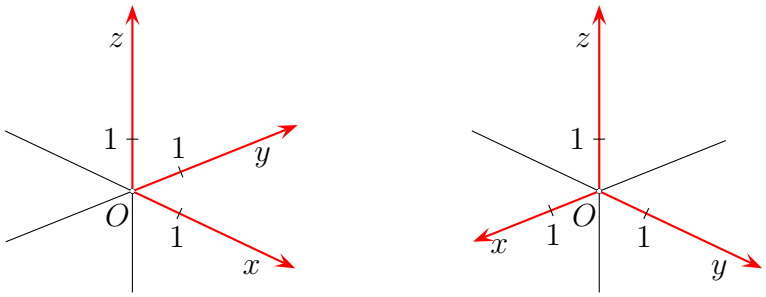
Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, je

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - \lambda - \tfrac{1}{2}\mu &= 0, \\ \mu - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

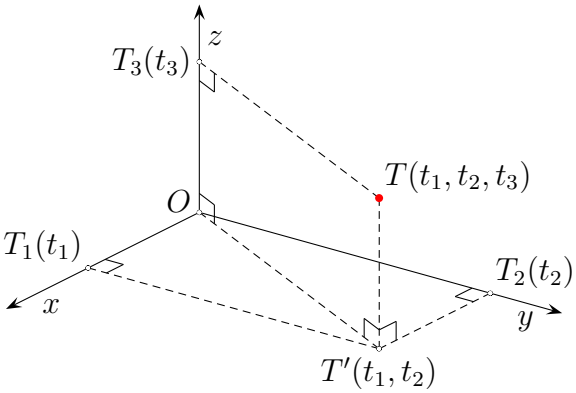
Torej je $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\lambda$, kar nam da $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$. Sledi $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ in točka F deli daljico BD v razmerju $1 : 2$. ■

6.2 Koordinatni sistem v prostoru

Izberimo v prostoru poljubno točko O in položimo skoznjo tri paroma pravokotne številske premice in sicer tako, da je točka O na vseh treh premicah slika števila 0. Premice imenujemo *koordinatne osi*, točko O *koordinatno izhodišče*, vse skupaj pa sestavlja *pravokotni koordinatni sistem v prostoru*. Premice običajno označimo z x, y in z tako, da če zavrtimo os x okoli osi z za $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri, preide v os y.

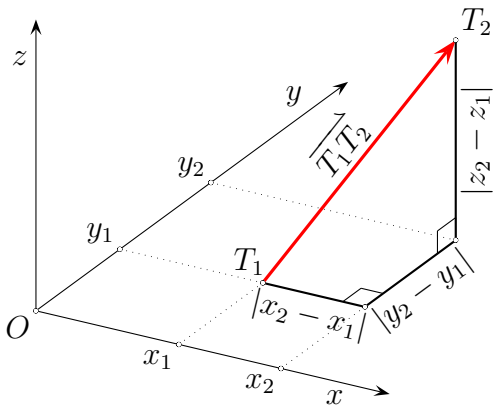


Za poljubno točko T v prostoru označimo s T_1, T_2 in T_3 pravokotne projekcije točke T na koordinatne osi. Točki T_1 ustreza realno število t_1, točki T_2 ustreza realno število t_2, točki T_3 pa ustreza realno število t_3. Torej smo točki T priredili trojico realnih števil (t_1, t_2, t_3), ki jo imenujemo *koordinate točke* T.



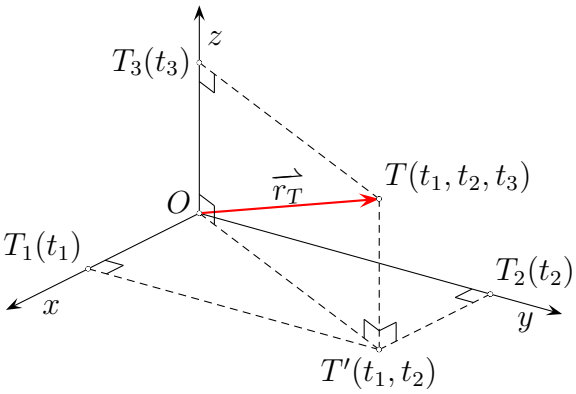
Razdaljo med dvema točkama izračunamo po Pitagorovem izreku kot dolžino diagonale ustreznega kvadra. Za točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ je

$$\operatorname{dist}(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Krajevni vektor točke T je usmerjena daljica od točke O do točke T in ga označimo z $\overrightarrow{r_T}$. Skratka: $\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT}$.

Ker je točka T enolično določena s trojico (t_1, t_2, t_3), je s temi koordinatami tudi enolično določen krajevni vektor točke T. Torej lahko označimo $\overrightarrow{r_T} = (t_1, t_2, t_3)$.



Razdaljo med točko T in koordinatnim izhodiščem O izračunamo po Pitagorovem izreku kot dolžino diagonale ustreznega kvadra. *Dolžina vektorja* $\overrightarrow{r_T}$ je tako enaka

$$\|\overrightarrow{r_T}\| = \operatorname{dist}(T, O) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}.$$

Vektorske operacije v koordinatnem zapisu Če je $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, je

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

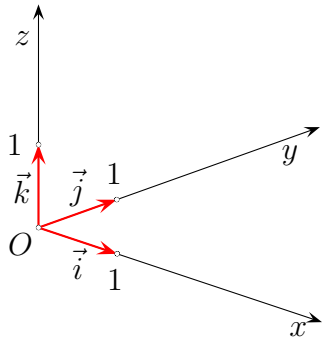
Ničelni vektor je $\vec{0} = (0, 0, 0)$, k vektorju $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ nasprotni vektor pa je $-\vec{a} = (-x_1, -y_1, -z_1)$. Za vektorja $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ je tako

$$\vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Če je $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\lambda \in \mathbb{R}$, je

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

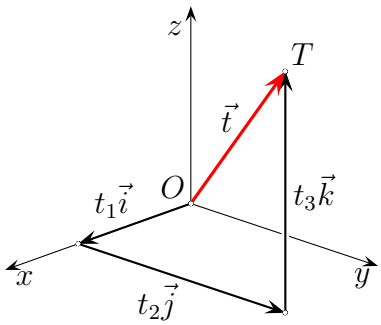
Baza prostora $\mathbb{R}^3$ Vpeljimo vektorje $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$. To so vektorji dolžine 1, ki kažejo v pozitivnih smereh koordinatnih osi. Vektorje $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ imenujemo *standardni bazni vektorji prostora* $\mathbb{R}^3$.



Za poljubno točko T naj bo (t_1, t_2, t_3) njen krajevni vektor. Torej je

$$(t_1, t_2, t_3) = t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) + t_3(0, 0, 1) = t_1\vec{i} + t_2\vec{j} + t_3\vec{k},$$

kar pomeni, da lahko vsak vektor v $\mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.



Ti vektorji so linearno neodvisni, saj iz $\lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Zgled 199 *Izračunaj* $7\vec{a} - 5\vec{b}$ *za* $\vec{a} = (2, -1, 3)$ *in* $\vec{b} = (-4, 2, 5)$.

Računajmo

$$\begin{aligned} 7\vec{a} - 5\vec{b} &= 7(2,-1,3) - 5(-4,2,5) = \\ &= (14,-7,21) - (-20,10,25) = (34,-17,-4) \end{aligned}$$

Zgled 200 *Določi vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je $\vec{a} - 2\vec{b} = (-1,2,2)$ in $2\vec{a} + 3\vec{b} = (1,0,-1)$.*

Iz $\vec{a} - 2\vec{b} = (-1,2,2)$ sledi $\vec{a} = 2\vec{b} + (-1,2,2)$. Torej je

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2(2\vec{b} + (-1,2,2)) + 3\vec{b} = \\ &= 7\vec{b} + (-2,4,4), \end{aligned}$$

kar nam da

$$7\vec{b} = (1,0,-1) - (-2,4,4) = (3,-4,-5).$$

Sledi $\vec{b} = (\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7})$ in $\vec{a} = (-1,2,2) + 2(\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}) = (-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7})$.

Skalarni produkt vektorjev *Skalarni produkt* vektorjev $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ je število $\vec{a} \cdot \vec{b}$, definirano s predpisom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

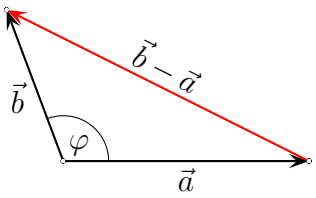
Neposredno iz definicije sledi, da za skalarni produkt velja

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $\vec{a} = \vec{0}$,
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.
- Standardni bazni vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ so enotski in paroma pravokotni:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \text{in} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Označimo s φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. V trikotniku z dolžinami stranic $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ in $\|\vec{b} - \vec{a}\|$ velja *kosinusni izrek*

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi. \qquad (25)$$



Ker pa je

$$\begin{aligned} \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \qquad (26) \end{aligned}$$

iz (26) in (25) sledi, da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi.$$

Zgled 201 *Izračunaj skalarni produkt vektorjev* $\vec{a} = (1, 2, 3)$ *in* $\vec{b} = (-1, 0, 2)$.

Rešitev. Skalarni produkt je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 5.$$

Zgled 202 *Določi kot med vektorjema* $\vec{a} = (-1, 3, 0)$ *in* $\vec{b} = (1, -2, 2)$.

Rešitev. Skalarni produkt vektorjev je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = -7.$$

Ker je $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ in $\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, velja

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-7}{3\sqrt{10}},$$

kar nam da $\varphi = \arccos \frac{-7}{3\sqrt{10}} \approx 137.55°$.

Zgled 203 *Vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *oklepata kot* $\frac{2\pi}{3}$. *Izračunaj* $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + \vec{b})$, *če je* $\|\vec{a}\| = 2$ *in* $\|\vec{b}\| = 3$.

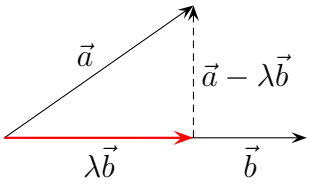
Označimo $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ in računajmo

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + \vec{b}) &= -3\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} = \\
&= -3\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} = \\
&= -3\|\vec{a}\|^2 - 5\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi + 2\|\vec{b}\|^2 = \\
&= -3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-\tfrac{1}{2}) + 2 \cdot 3^2 = \\
&= -12 + 15 + 18 = 21.
\end{aligned}$$

Zgled 204 *Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja* $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ *na vektor* $\vec{b} = (1, 2, 3)$.

Pravokokotna projekcija je tak vektor $\vec{a}_b = \lambda\vec{b}$, da je $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$. Torej je

$$(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0.$$



Sledi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda\|\vec{b}\|^2$, kar nam da $\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ in

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b}.$$

V danem primeru je

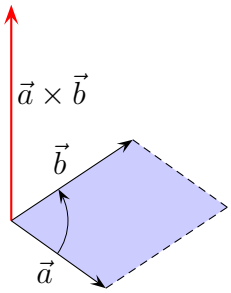
$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-1, 1, 0) \cdot (1, 2, 3) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 1 \\
\|\vec{b}\|^2 &= \vec{b} \cdot \vec{b} = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\vec{a}_b = \frac{1}{14}(1, 2, 3).$$

Vektorski produkt vektorjev *Vektorski produkt* vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, določen s pogoji

1. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$
2. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
3. vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$ sestavljajo *pozitivno orientirano* trojico vektorjev. Torej: če imajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$ skupno začetno točko in gledamo v smeri vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$, se vidi najkrajše vrtenje vektorja $\vec{a}$ v $\vec{b}$ v smeri gibanja kazalcev na uri.



Dokazati je možno, da za vektorski produkt velja

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna. Posebej: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za vsak vektor $\vec{a}$.

Ker so standardni bazni vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ enotski in paroma pravokotni, je

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} &= \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} &= \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

Torej lahko za vektorja $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ zapišemo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\,\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\,\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\,\vec{i} \times \vec{k} + \\ &\quad y_1x_2\,\vec{j} \times \vec{i} + y_1y_2\,\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\,\vec{j} \times \vec{k} + \\ &\quad z_1x_2\,\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\,\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\,\vec{k} \times \vec{k} = \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}. \end{aligned}$$

Vektorski produkt vektorjev je torej

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$$

Iz pogoja $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$ vidimo, da je dolžina vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ enaka ploščini paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Vektorski produkt najlažje izračunamo s pomočjo trivrstične determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}.$$

Zgled 205 *Izračunaj vektorski produkt vektorjev* $\vec{a} = (1,2,3)$ *in* $\vec{b} = (-1,0,2)$.

Rešitev. Vektorski produkt je

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,-5,2).$$

Zgled 206 *Izračunaj* $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-5\vec{b})$ *za* $\vec{a} = (-1,1,2)$ *in* $\vec{b} = (1,3,-2)$.

Računajmo

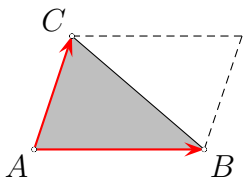
$$\begin{aligned} (2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}+5\vec{b}) &= 2\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{=\vec{0}} + 10\vec{a}\times\vec{b} + 3\vec{b}\times\vec{a} + 15\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{=\vec{0}} = \\ &= 10\vec{a}\times\vec{b} - 3\vec{a}\times\vec{b} = 7\vec{a}\times\vec{b} = \\ &= 7\vec{a}\times\vec{b} = 7\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 7\,(-8,0,-4) = \\ &= (-56,0,-28). \end{aligned}$$

Do enakega rezultata pridemo tudi, če izračunamo $2\vec{a}+3\vec{b} = (1,11,-2)$ in $\vec{a}+5\vec{b} = (4,16,-8)$ ter

$$(1,11,-2)\times(4,16,-8) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 11 & -2 \\ 4 & 16 & -8 \end{vmatrix} = (-56,0,-28).$$

Zgled 207 *Določi ploščino trikotnika z oglišči v točkah* $A(1,2,-1)$, $B(-1,0,2)$ *in* $C(2,-1,0)$.

Rešitev. Trikotnik je napet na vektorja $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (-2,-2,3)$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = (1,-3,1)$. Ploščina trikotnika ABC je enaka polovici ploščine paralelograma, napetega na vektorja $\vec{b}$ in $\vec{c}$, torej $p = \frac{1}{2}\|\vec{b}\times\vec{c}\|$. Računajmo:



$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (7,5,8).$$

Sledi $p = \frac{1}{2}\|\vec{b}\times\vec{c}\| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+5^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{138}$.

Zgled 208 *Vektorja* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *oklepata kot* $\frac{\pi}{6}$. *Izračunaj ploščino paralelograma, napetega na vektorja* $\vec{a}+2\vec{b}$ *in* $-3\vec{a}+\vec{b}$, *če je* $\|\vec{a}\| = 2$ *in* $\|\vec{b}\| = 3$.

Označimo $\varphi = \frac{\pi}{6}$ in računajmo

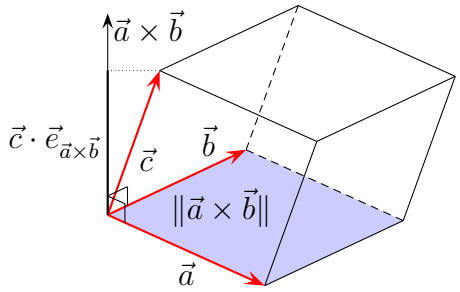
$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\times(-3\vec{a}+\vec{b}) &= -3\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{=\vec{0}}+\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{a}+2\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{=\vec{0}}= \\ &= 7\vec{a}\times\vec{b}.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}p &= \|(\vec{a}+2\vec{b})\times(-3\vec{a}+\vec{b})\| = \|7\vec{a}\times\vec{b}\| = \\ &= 7\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi = 7\cdot 2\cdot 3\cdot(\tfrac{1}{2}) = 21.\end{aligned}$$

Mešani produkt *Mešani produkt* vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalar $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, ki ga označimo z $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



Če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ neničelni, je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$ natanko tedaj, ko ležijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.

Privzemimo sedaj, da neničelni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ne ležijo v isti ravnini. Mešani produkt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je potem pozitiven natanko tedaj, ko tvorijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pozitivno orientirano trojico v $\mathbb{R}^3$.

Izrek 90 (Cikličnost mešanega produkta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}).$$

Naj bo $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$ in $\vec{c} = (x_3,y_3,z_3)$. Potem je

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2)\cdot(x_3,y_3,z_3),= \\ &= y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3\end{aligned}$$

kar si najlažje zapomnimo s pomočjo determinante:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - y_1(x_2z_3 - z_2x_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3).$$

Vrednost determinante lahko izračunamo tudi tako, da na desni pripišemo prva dva stolpca ter seštejemo produkte na glavnih diagonalah (polne črte) in odštejemo produkte na stranskih diagonalah (črtkane črte):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3.$$

Zgled 209 *Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje* $\vec{a}=(-2,1,3)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$ *in* $\vec{c}=(-3,0,1)$.

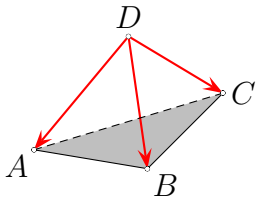
Rešitev. Prostornina je absolutna vrednost mešanega produkta; tj. $V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$. Računajmo

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=4-6+0-18-1-0=-21.$$

Torej je $V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=21$.

Zgled 210 *Izračunaj prostornino piramide z oglišči v točkah* $A(1,2,3)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,-3)$ *in* $D(1,-1,0)$.

Označimo $\vec{a}=\overrightarrow{DA}=(0,3,3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}=(-2,3,0)$ in $\vec{c}=\overrightarrow{DC}=(1,2,-3)$. Prostornina piramide je $\frac{1}{6}$ prostornine paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$; tj. $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$. Računajmo



$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}0 & 3 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0+0-12-0-18-9=-39.$$

Torej je $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$.

Zgled 211 *Volumen paralelepipeda, napetega na vektorje* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *in* $\vec{c}$ *je 1. Koliko je volumen paralelepipeda, napetega na vektorje* $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$?

Izračunajmo mešani produkt:

$$\begin{aligned}(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{c},\vec{b}+\vec{c}) &= \Big((2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{c})\Big)\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\\ &= (2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}}+4\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\\ &= 4(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}-\underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}_{=0}-\underbrace{2(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{b}}_{=0}+\\ &\quad \underbrace{4(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}-\underbrace{2(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}=\\ &= -4(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-3(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

Ker je $\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=1$, je iskani volumen enak

$$\left|(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{c},\vec{b}+\vec{c})\right|=3\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=3.$$

Zgled 212 *Ali lahko določimo vrednost parametra* λ *tako, da bodo vektorji* $\vec{a}=(-1,1,2)$, $\vec{b}=(\lambda,0,1)$ *in* $\vec{c}=(1,2,-1)$ *ležali v isti ravnini?*

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ bodo komplanarni natanko tedaj, ko bo vrednost mešanega produkta enaka 0; tj. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$. Računajmo

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0+1+4\lambda+2+\lambda-0=5\lambda+3.$$

Torej je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=5\lambda+3=0$, kar nam da $\lambda=-\frac{3}{5}$.

Dvojni vektorski produkt

Izrek 91 *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \quad (27)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \quad (28)$$

Dokaz. Enakost (28) sledi iz enakosti (27), če upoštevamo, da je

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{a}.$$

Enakost (27) pa najlažje dokažemo tako, da postavimo

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\\ \vec{b} &= x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\\ \vec{c} &= x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k},\end{aligned}$$

in izračunamo obe strani v formuli (27). ■

Izrek 92 (Jacobijeva identiteta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Dokaz. Identiteto dokažemo z uporabo formule (27). Izraz na levi strani je tako enak

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}+(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{0}.$$

Izrek 93 (Lagrangeova identiteta) *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ velja*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Dokaz. Produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ lahko prepoznamo kot mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}\times\vec{d}$. Torej je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\cdot\vec{a},$$

kjer zadnja enakost drži zaradi cikličnosti mešanega produkta. Sledi

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\cdot\vec{a}=\\ &= ((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d})\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{d}\cdot\vec{a})=\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Lagrangeovo identiteto pogosto uporabljamo v primeru, ko je $\vec{a}=\vec{c}$ in $\vec{b}=\vec{d}$. Tedaj je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{a}),$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ oziroma

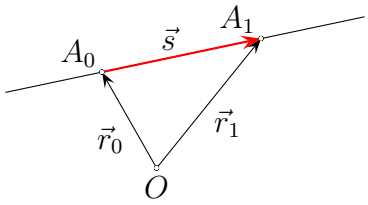
$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2.$$

6.3 Premica in ravnina v prostoru

Premica Naj bosta A_0 in A_1 različni točki v prostoru ter $\vec{r}_0$ in $\vec{r}_1$ njuna krajevna vektorja. Potem obstaja natanko ena premica, ki ti dve točki vsebuje. Naj bo $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke na premici. Potem sta vektorja $\vec{r}-\vec{r}_0$ in $\vec{s}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$ linearno odvisna in lahko zapišemo $\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{s}$ oziroma

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{s}. \tag{29}$$

Vektor $\vec{s}$ imenujmo *smerni vektor* premice, enačbo (29) pa *vektorska enačba premice*.



Če je $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ in $\vec{s}=(x_1,y_1,z_1)$, lahko gornjo enačbo zapišemo v *parametrični obliki*

$$x=x_0+\lambda x_1,\quad y=y_0+\lambda y_1,\quad z=z_0+\lambda z_1.$$

Če predpostavimo, da smerni vektor ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin (tj. $x_1y_1z_1\neq 0$), lahko zapišemo *normalno enačbo premice*

$$\frac{x-x_0}{x_1}=\frac{y-y_0}{y_1}=\frac{z-z_0}{z_1}. \tag{30}$$

Če pa je npr. $x_1=0$, pa v (30) namesto ulomka $\frac{x-x_0}{x_1}$ zapišemo pogoj $x=x_0$.

Zgled 213 *Zapiši parametrično in normalno enačbo premice skozi točki* $A_0(0,1,-2)$ *in* $A_1(3,-2,1)$.

Rešitev. Smerni vektor premice je

$$\vec{s}=(3,-2,1)-(0,1,-2)=(3,-3,3)=3(1,-1,1).$$

Za smerni vektor lahko vzamemo kar vektor $(1,-1,1)$. Parametrična enačba premice se tako glasi

$$\vec{r}=(0,1,-2)+\lambda(1,-1,1),$$

normalna pa

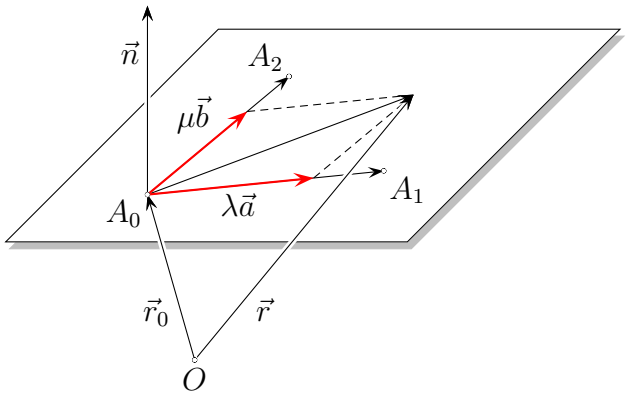
$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}.$$

Ravnina Naj bodo A_0, A_1 in A_2 take točke v prostoru, da sta vektorja $\vec{a}=\overrightarrow{A_0A_1}$ in $\vec{b}=\overrightarrow{A_0A_2}$ linearno neodvisna. Potem točke A_0, A_1 in A_2 določajo natanko eno ravnino. Če je $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke na ravnini, velja $\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$. Torej je

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}. \tag{31}$$

Po definiciji vektorskega produkta je vektor $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ pravokoten na ravnino, ki jo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ napenjata. Torej je $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$. Sledi

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_0\cdot\vec{n}. \tag{32}$$



Enačbo (32) imenujemo *normalna enačba ravnine*, vektor $\vec{n}$ pa *normala ravnine*. Običajno zapišemo normalno enačbo ravnine v obliki

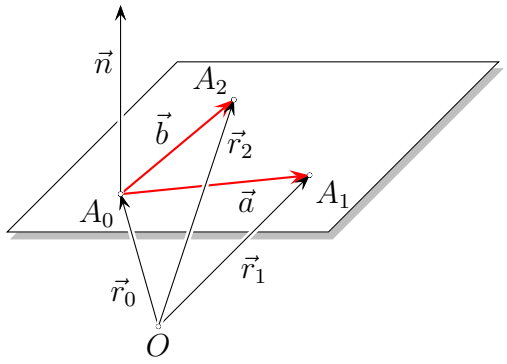
$$\vec{r} \cdot \vec{n} = d, \tag{33}$$

saj je število $\vec{r} \cdot \vec{n}$ enako za vse točke na ravnini, torej tudi za $\vec{r} = \vec{r}_0$. Če je $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{n} = (a, b, c)$ in $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} = d$, lahko gornjo enačbo zapišemo kot

$$ax + by + cz = d. \tag{34}$$

Zgled 214 *Zapiši enačbo ravnine skozi točke* $A_0(3, 1, -2)$, $A_1(3, -2, 1)$ *in* $A_2(-1, 0, 1)$.

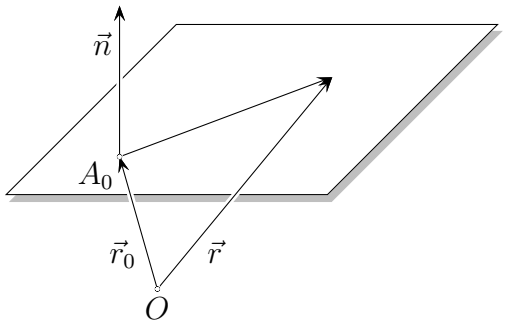
Označimo $\vec{a} = (3, -2, 1) - (3, 1, -2) = (0, -3, 3)$ in $\vec{b} = (-1, 0, 1) - (3, 1, -2) = (-4, -1, 3)$.



Normala ravnine je vektor $\vec{a} \times \vec{b} = (-6, -12, -12)$. Ker dolžina normale ni pomembna, lahko postavimo $\vec{n} = (1, 2, 2)$. Enačba ravnine se tako glasi $(x, y, z) \cdot (1, 2, 2) = (3, 1, -2) \cdot (1, 2, 2)$, kar lahko zapišemo v obliki $x + 2y + 2z = 1$.

Zgled 215 *Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko* $A_0(1, 1, 2)$ *in je pravokotna na vektor* $\vec{a} = (-1, 2, -2)$.

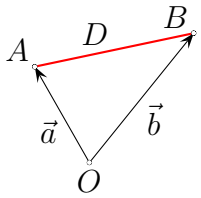
Vektor $\vec{a}$ je normala te ravnine: $\vec{n} = \vec{a}$. Enačba ravnine se zato glasi $(x, y, z) \cdot (-1, 2, -2) = (1, 1, 2) \cdot (-1, 2, -2)$ oziroma $-x + 2z - 2z = -3$.



6.4 Razdalje med točkami, premicami in ravninami

Razdalja med točkama
Če imata točki A in B krajevna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je razdalja med njima enaka

$$D = \|\vec{b} - \vec{a}\|.$$



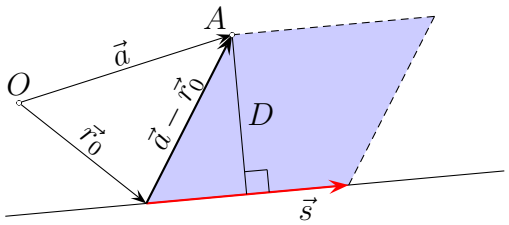
Zgled 216 *Izračunaj razdaljo med točkama* $A(-2,1,3)$, $B(3,0,-1)$.

Za $\vec{a} = (-2,1,3)$ in $\vec{b} = (3,0,-1)$ je $\vec{b} - \vec{a} = (5,-1,-4)$ in

$$D = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{42}.$$

Razdalja med točko in premico Naj ima točka A krajevni vektor $\vec{a}$, premica pa naj bo podana z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}$. Če točka A ne leži na tej premici, razpenjata vektorja $\vec{s}$ in $\vec{a} - \vec{r}_0$ paralelogram, katerega ploščina je enaka $\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|$. Ker pa je ploščina paralelograma enaka tudi $D\|\vec{s}\|$, sledi

$$D = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}.$$



Opazimo lahko, da je gornja formula pravilna tudi, če točka A leži na dani premici, saj je tedaj $D = 0$ in tudi $\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0) = \vec{0}$.

Zgled 217 *Izračunaj razdaljo med točko* $A(2,2,0)$ *in premico z enačbo*

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}.$$

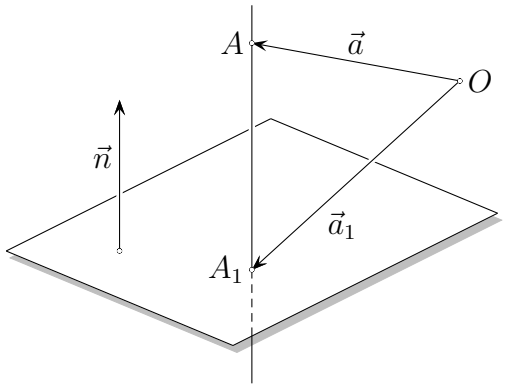
Iz podatkov razberemo $\vec{a} = (2, 2, 0)$, $\vec{s} = (4, 3, 5)$ in $\vec{r}_0 = (1, 0, 2)$. Potem je $\vec{a} - \vec{r}_0 = (1, 2, -2)$ in

$$\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 13, 5).$$

in

$$D = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\sqrt{(-16)^2 + 13^2 + 5^2}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{50}} = 3.$$

Razdalja med točko in ravnino Dana je točka A s krajevnim vektorjem $\vec{a}$ in ravnina z enačbo $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$. Razdaljo med točko in ravnino izračunamo tako, da točko pravokotno projeciramo na ravnino (točka A_1) ter izračunamo razdaljo med točkama A in A_1.



Premica, ki poteka skozi točko A in seka ravnino pravokotno, ima enačbo $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{n}$. Če z $\vec{a}_1$ označimo krajevni vektor točke A_1, velja

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + \lambda\vec{n}, \tag{35}$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{n} = d \tag{36}$$

Ko (35) vstavimo v (36), dobimo $\lambda = \frac{d - \vec{a} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$. Torej je $D = \|\vec{a}_1 - \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{n}\|$ oziroma

$$D = \frac{|d - \vec{a} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Gornja formula velja tudi v primeru, ko leži točka A na ravnini, saj je $D = 0$ in $d - \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, ker vektor $\vec{a}$ ustreza enačbi ravnine $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$.

Zgled 218 *Izračunaj razdaljo med točko $A(1, 2, -1)$ in ravnino z enačbo*

$$-3x + y + 2z = 5.$$

Iz podatkov razberemo $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{n} = (-3, 1, 2)$ in $d = 5$. Torej je

$$d - \vec{a} \cdot \vec{n} = 5 - (1, 2, -1) \cdot (-3, 1, 2) = 5 - (-3 + 2 - 2) = 8$$

in

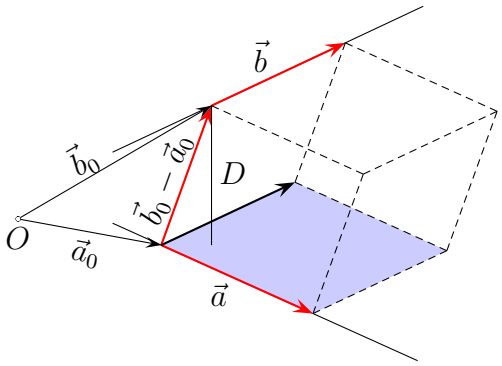
$$\|\vec{n}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Sledi

$$D = \frac{|d - \vec{a} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Razdalja med premicama V prostoru sta podani premici z enačbama $\vec{r} = \vec{a}_0 + \lambda\vec{a}$ in $\vec{r} = \vec{b}_0 + \lambda\vec{b}$. Privzeti smemo, da premici nista vzporedni, saj lahko v tem primeru izračunamo razdaljo med premicama kot razdaljo med eno premico in poljubno točko na drugo premici. Privzeti smemo tudi, da se premici ne sekata. Torej so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{b}_0 - \vec{a}_0$ linearno neodvisni in je zato prostornina paralelepipeda, napetega na te tri vektorje, enaka $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}_0 - \vec{a}_0)|$. Prostornino pa lahko izračunamo tudi kot produkt ploščine osnovne ploskve (tj. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$) in višine D, ki je hkrati tudi neznana razdalja med premicama. Sledi

$$D = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}_0 - \vec{a}_0)|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}.$$



Omeniti velja, da gornja formula drži tudi, če se premici sekata, saj je v tem primeru $D = 0$, velja pa tudi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}_0 - \vec{a}_0) = 0$, saj leži $\vec{b}_0 - \vec{a}_0$ v ravnini, napeti na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Zgled 219 *Izračunaj razdaljo med premico skozi točki $A(0, -2, 1)$ in $B(-3, 1, 2)$ ter premico, podano z enačbama*

$$x = 2 \text{ in } \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

Vektorska oblika enačbe premice skozi točki $A(0, -2, 1)$ in $B(-3, 1, 2)$ je $\vec{r} = \vec{a}_0 + \lambda\vec{a}$, kjer je $\vec{a}_0 = (0, -2, 1)$ in $\vec{a} = (-3, 3, 1)$. Vektorska oblika enačbe druge premice pa je $\vec{r} = \vec{b}_0 + \lambda\vec{b}$, kjer je $\vec{b}_0 = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (0, 3, 2)$. Torej je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (3, 6, -9), \qquad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14},$$

$$\vec{b}_0 - \vec{a}_0 = (2, 1, 2) \text{ in } D = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b}_0 - \vec{a}_0)|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{|-6|}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Zgled 220 *Določi presečišče premice z enačbo $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ z ravnino z enačbo $x - 2y + z = -5$.*

Pišimo

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = t.$$

Potem je

$$x = t + 1, \quad y = 2t, \quad z = t - 1.$$

Iz enačbe ravnine sledi

$$\overbrace{(t+1)}^{x} - 2\overbrace{(2t)}^{y} + \overbrace{(t-1)}^{z} = -5,$$

kar nam da $-2t = -5$ oz. $t = \frac{5}{2}$. Presečišče je v točki $(\frac{7}{2}, 5, \frac{3}{2})$.

Zgled 221 *Določi presečišče ravnin z enačbama*

$$x - 2y - 4z = -3 \quad in \quad 2x + y - 3z = -1.$$

Iz prve enačbe izrazimo $x = -3 + 2y + 4z$ in ga vstavimo v drugo enačbo

$$2(-3 + 2y + 4z) + y - 3z = -1.$$

Sledi $5y + 5z = 5$ in

$$y = -z + 1.$$

Torej je

$$x = -3 + 2(-z + 1) + 4z = 2z - 1.$$

Enačbo premice lahko zapišemo tudi v obliki

$$(x, y, z) = (2z - 1, -z + 1, z) = (-1, 1, 0) + z(2, -1, 1).$$

Zgled 222 *Določi presečišče ravnin z enačbami*

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1, \\ 3x + 3y - z &= 2 \quad in \\ x - y + z &= -3. \end{aligned}$$

Poiskati moramo rešitev sistema 3 enačb s 3 neznankami. Iz zadnje enačbe izrazimo $x = y - z - 3$. Sledi

$$\begin{aligned} 2(y - z - 3) + y + 3z &= 1 \ \text{ in} \\ 3(y - z - 3) + 3y - z &= 2, \end{aligned}$$

kar lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned} 3y + z &= 7 \ \text{ in} \\ 6y - 4z &= 11. \end{aligned}$$

Torej je $z = 7 - 3y$ in

$$6y - 4(7 - 3y) = 11,$$

kar nam da $18y = 39$ in

$$\begin{aligned} y &= \frac{39}{18} = \frac{13}{6}, \\ z &= 7 - 3y = \frac{1}{2}, \\ x &= y - z - 3 = \frac{13}{6} - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ravnine se torej sekajo v točki $(-\frac{4}{3}, \frac{13}{6}, \frac{1}{2})$.

7 Matrike

7.1 Operacije z matrikami

Matrika je pravokotna tabela (shema) realnih števil, sestavljena iz *vrstic* in *stolpcev*:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{5} & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Množico vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci označimo z $\mathbb{R}^{m\times n}$. V splošnem označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ali krajše $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Matriki

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

pravimo i-ta vrstica matrike A, matriki

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

pravimo j-ti stolpec matrike A, število a_{ij} pa imenujemo (i,j)-*ti element* matrike A.

Matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $A' \in \mathbb{R}^{m'\times n'}$ sta *enaki*, če je $m = m'$, $n = n'$ ter $a_{ij} = a'_{ij}$ za $i = 1, \dots, m$ in $j = 1, \dots, n$. Enostavno povedano: matriki sta enaki, če sta enakih razsežnosti in se ujemata v istoležnih elementih.

Za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo *vsoto matrik* $A + B$. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

je

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in število $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo *produkt s skalarjem* λ. Če je A kot zgoraj, je

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 223 *Izračunaj* $5A - 3B$ *za matriki* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Računajmo

$$\begin{aligned} 5A - 3B &= 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 4 & 29 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Navedimo glavne lastnosti seštevanja in množenja matrik s skalarjem.

- *asociativnost seštevanja*
  $(A + B) + C = A + (B + C)$ za vse $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- *obstoj nevtralnega elementa za seštevanje*
  Za *ničelno matriko*
  $$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
  velja $A + 0 = 0 + A = A$ za vsak $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- *obstoj nasprotnega elementa za seštevanje*
  Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ima *nasprotna* matrika $-A = (-1)A$ lastnost $A + (-A) = 0$.
- *komutativnost seštevanja*
  $A + B = B + A$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- *distributivnost v skalarnem faktorju*
  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- *distributivnost v matričnem faktorju*
  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$,
- *multiplikativnost v skalarnem faktorju*
  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- *množenje s skalarjem* 1
  $1 \cdot A = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Če ima matrika A toliko **stolpcev** kot ima matrika B **vrstic**, lahko matriki A in B zmnožimo. *Produkt matrik* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ A in B je matrika $C = [c_{ij}]$, katere elementi so

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

za $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Skratka

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}}_{A \cdot B}.$$

Drugače povedano: (i, j)-ti element matrike AB je skalarni produkt i-te vrstice matrike A (kot vektorja) in j-tega stoplca matrike B (kot vektorja).

Zgled 224 *Izračunaj produkt AB za matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -12 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zgled 225 *Izračunaj produkta AB in BA za matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.*

Računajmo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Račun torej kaže, da je $AB \neq BA$. Pravimo, da je množenje matrik *nekomutativno*. (Še več, razsežnosti matrik A in B so lahko take, da obstaja le eden od produktov AB in BA.)

Množenje matrik zadošča pogojem

- *asociativnost*
  $(AB)C = A(BC)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$,

- *obstoj enote za množenje*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

  Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $I_m A = A I_n = A$. Kvadratno matriko I_n imenujemo *identična matrika*. Pogosto namesto I_n pišemo kar I, ko je iz besedila razvidno, kakšne razsežnosti je matrika I.

- *leva distributivnost*
  $(A + B)C = AC + BC$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

- *desna distributivnost*
  $A(B + C) = AB + AC$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

- *homogenost*
  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$.

Izrek 94 *Za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ velja $(AB)C = A(BC)$.*

Označimo $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ in $C = [c_{ij}]$. Izračunajmo (i, j)-ti element matrike $(AB)C$:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}) c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (BC)_{kj} = (A(BC))_{ij}. \end{aligned}$$

Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

definiramo *transponirano matriko k A*

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Skratka: za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Zgled 226 *Zapiši transponirano matriko k matriki* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Velja

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Za transponiranje matrik velja

- $(A^T)^T = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $(A+B)^T = (A+B)^T$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(AB)^T = B^T A^T$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$

Izrek 95 *Za* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *in* $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *velja* $(AB)^T = B^T A^T$.

Označimo $A = [a_{ij}]$ in $B = [b_{ij}]$. Izračunajmo (i,j)-ti element matrike $(AB)^T$:

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

Ker pa je

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik} A^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

res velja $(AB)^T = B^T A^T$.

8 Determinante in sistemi linearnih enačb

8.1 Permutacije

Permutacija reda n je bijektivna preslikava $\sigma\colon \{1,2,3,\ldots,n\} \to \{1,2,3,\ldots,n\}$. Množico vseh permutacij reda n označimo z S_n.

Permutacijo običajno zapišemo v obliki

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

kjer gornja oznaka pomeni, da je $\sigma(1) = a_1$, $\sigma(2) = a_2$, $\ldots$, $\sigma(n) = a_n$.

Zgled 227 *Zapiši permutacijo* $\sigma \in S_4$, *ki preslika* $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$ *in* $4 \mapsto 2$.

Ker je preslikava σ bijekcija, mora veljati še $\sigma\colon 3 \mapsto 4$. Torej je

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Permutacija ι je *identična permutacija*, če je $\iota(i) = i$ za vsak i. (To je pravzaprav identična preslikava.)

Permutacija τ je *transpozicija*, če za neka i in j, $i \neq j$, velja $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ in $\tau(k) = k$ za vsak $k \notin \{i, j\}$.

Zgled 228 *Zapiši transpozicijo $\sigma \in S_4$, ki zamenja števili 2 in 4.*

Iskana transpozicija je

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dokazati je možno, da za vsako permutacijo σ obstajajo transpozicije τ_1, τ_2, ..., τ_m, da je

$$\tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma = \iota.$$

Število transpozicij, ki uredijo σ v identično permutacijo, ni enolično določeno. Dokazati je možno, da iz

$$\tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma = \iota$$

in

$$\tau_{m'} \circ \tau_{m'-1} \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma = \iota$$

sledi, da je $m \equiv m' \pmod 2$ (tj. števili m in m' sta iste parnosti), kar pomeni, da je $(-1)^m = (-1)^{m'}$. Število $(-1)^m$ imenujemo *predznak permutacije* in ga označimo s $\operatorname{sign}(\sigma)$. Permutacije s predznakom 1 so *sode*, permutacije s predznakom -1 pa *lihe*.

8.2 Determinante

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrike A je število $\det(A)$, ki je vsota vseh možnih produktov po enega števila iz vsake vrstice in stolpca z upoštevanjem ustreznih predznakov. Natančneje:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}, \tag{37}$$

kjer S_n označuje množico vseh permutacij reda n, število $\operatorname{sign}(\sigma)$ pa predznak permutacije σ. Običajno pišemo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Opozoriti velja, da je za velike n izračun vrednosti determinante po definiciji zelo zamuden, saj ima množica S_n natančno $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ elementov. Torej je potrebno za izračun determinante reda n sešteti $n!$ členov in pri vsakem od njih je potrebno pravilno določiti predznak ustrezne permutacije.

Oglejmo si sedaj vrednost $\det(A)$ za majhne razsežnosti matrike A.
Pri $n = 1$ je

$$A = [a_{11}].$$

V vsoti (37) imamo je en člen, torej je

$$\det(A) = a_{11}.$$

Pri $n = 2$ je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

V množici S_2 imamo je dve permutaciji $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Permutacija ι je identična in ima predznak $(-1)^0 = 1$, permutacija τ pa je transpozicija in ima predznak $(-1)^1 = -1$. Torej je

$$\det(A) = \operatorname{sign}(\iota) a_{1\iota(1)} a_{2\iota(2)} + \operatorname{sign}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pri $n = 3$ je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

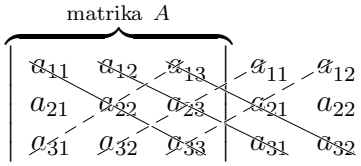
V množici S_3 je natančno $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutacij. Te so

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \qquad \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \qquad \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \qquad \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hitro se vidi, da imajo permutacije σ_1, σ_4 in σ_5 predznak 1, ostale pa predznak -1. Torej je

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

To formulo si lahko enostavno zapomnimo tako, da k matriki A na desni pripišemo prva dva stolpca matrike A



ter seštejemo produkte na glavnih diagonalah (polne črte) in odštejemo produkte na stranskih (črtkane črte).

Opozorilo. Zgoraj opisani prijem s pripisovanjem dveh stolpcev na desni (*Sarrusovo pravilo*) velja **samo** za izračun determinant razsežnosti 3×3. Metoda za splošen n, $n \neq 3$, **ne drži** in je tudi ni možno ustrezno prirediti.

8.3 Računanje determinant

- Matrika A in njej transponirana matrika A^T imata enako determinanto: $\det(A) = \det(A^T)$. Torej

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Če pomnožimo vse elemente v kakšni vrstici (ali stolpcu) z istim faktorjem k, se vrednost determinante pomnoži s k.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Če v determinanti dve vrstici (ali stolpca) zamenjamo med sabo, determinanta spremeni predznak.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Če sta v determinanti dve vrstici enaki (ali dva stolpca enaka), je vrednost determinante enaka 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

- Če so vsi elementi, ki ležijo na eni strani glavne diagonale, enaki 0, je vrednost determinante enaka produktu diagonalnih elementov.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

- Vrednost determinante se ne spremeni, če k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice (ali če k enemu stolpcu prištejemo večkratnik drugega stolpca).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Zgled 229 *Izračunaj vrednost determinante* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$.

Rešimo nalogo na 2 načina. Po Sarrusovem pravilu je

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{matrix} = -6+0+5-0-0-(-1) = 0.$$

Z vrstičnimi operacijami izračunamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zgled 230 *Izračunaj vrednost determinante* $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Z vrstičnimi operacijami izračunamo

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-2) = 2.$$

Zgled 231 *Izračunaj vrednost determinante* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Z vrstičnimi operacijami izračunamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 3.$$

Zgled 232 *Izračunaj vrednost determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Z vrstičnimi operacijami izračunamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot \frac{8}{3} = -8.$$

Zgled 233 *Določi vrednost parametra x tako, da bo vrednost determinante* $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -x & x & 2 \end{vmatrix}$ *enaka 0.*

Po Sarrusovem pravilu izračunamo

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -x & x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 & x \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -x & x & 2 & -x & x \end{vmatrix} =$$
$$= 2 + x^2 + 4x - (-2x) - (-x) - 4x = x^2 + 3x + 2.$$

Ker je $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, je vrednost determinante enaka 0 le za $x = -1$ in $x = -2$.

8.4 Poddeterminante

Fiksirajmo indeksa $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in iz primernih $(n - 1)!$ členov v izrazu

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}, \tag{38}$$

izpostavimo a_{ij}. Izraz, ki nam ostane (torej vsota $(n - 1)!$ členov, od katerih je vsak produkt $n - 1$ elementov determinante), označimo z A_{ij} in imenujemo *poddeterminanta* elementa a_{ij} v determinanti $\det(A)$. Poddeterminanto A_{ij} izračunamo tako, da iz matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pobrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec in izračunamo determinanto dobljene matrike razsežnosti $(n - 1) \times (n - 1)$.

Naj bo i katerakoli vrstica determinante $\det(A)$. Ker je v vsakem členu v (38) po en faktor iz i-te vrstice, je možno zapisati tudi

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in}. \tag{39}$$

Tej formuli pravimo *razvoj determinante po i-ti vrstici.*

Naj bo j katerikoli stolpec determinante $\det(A)$. Ker je v vsakem členu v (38) po en faktor iz j-tega stolpca, je možno zapisati

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj}. \tag{40}$$

Tej formuli pravimo *razvoj determinante po j-tem stolpcu.*

Zgled 234 *Izračunaj*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

s pomočjo razvoja po drugi vrstici.

Rešitev. Računajmo

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{-7} + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{-8} + (-1)^{2+3}\cdot 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{-4} = \\ &= 0 + (-8) + 8 = 0.\end{aligned}$$

Zgled 235 *Izračunaj* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *s pomočjo razvoja po tretjem stolpcu.*

Rešitev. Zaradi dveh ničel v tretjem stolpcu je potrebno izračunati le

$$\begin{aligned}\det(A_{13}) &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-4) - 1\cdot 2 + 3\cdot 2 = 12, \\ \det(A_{33}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-8) - 2\cdot 1 + 3\cdot(-5) = -25.\end{aligned}$$

Torej je

$$\det(A) = (-1)^{1+3}1\cdot 12 + (-1)^{3+3}2\cdot(-25) = -38.$$

Oglejmo si še enkrat razvoj determinante po i-ti vrstici. Označimo $\widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$. Če v formuli (39) zamenjamo koeficiente $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ z $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$, kjer je $i \neq k$, dobimo

$$\det(A') = a_{k1}\widetilde{A}_{i1} + a_{k2}\widetilde{A}_{i2} + \ldots + a_{kn}\widetilde{A}_{in}. \tag{41}$$

To je ravno determinanta matrike A', v kateri smo vse elemente v i-ti vrstici nadomestili z elementi k-te vrstice in nato izračunali vrednost $\det(A')$ s pomočjo razvoja po i-ti vrstici. Ker sta v matriki A' i-ta in k-ta vrstica enaki, je $\det(A') = 0$. Torej za vsak $k \neq i$ velja

$$a_{k1}\widetilde{A}_{i1} + a_{k2}\widetilde{A}_{i2} + \ldots + a_{kn}\widetilde{A}_{in} = 0. \tag{42}$$

Podobno sklepamo, da tudi za vsak $k \neq j$ velja

$$a_{1k}\widetilde{A}_{1j} + a_{2k}\widetilde{A}_{2j} + \ldots + a_{nk}\widetilde{A}_{nj} = 0. \tag{43}$$

8.5 Cramerjevo pravilo

Oglejmo si sistem n linearnih enačb z n neznankami

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Koeficieti sistema so lahko poljubna realna števila. Smiselno je predpostaviti, da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj en koeficient neničeln, saj sicer ne bi imeli sistema n enačb z n neznankami.

Če je $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, pravimo, da je sistem *homogen*, sicer pa je *nehomogen*. Rešitev gornjega sistema je taka n-terica $(X_1, \ldots, X_n)$, da je

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &= b_1, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n &= b_n. \end{aligned}$$

Privzemimo sedaj, da je $(X_1, \ldots, X_n)$ rešitev gornjega sistema. Če pomnožimo prvo enačbo sistema z $\widetilde{A}_{11}$, drugo z $\widetilde{A}_{21}$, ..., in n-to z $\widetilde{A}_{n1}$, dobimo

$$\begin{aligned} a_{11}\widetilde{A}_{11}X_1 + a_{12}\widetilde{A}_{11}X_2 + \ldots + a_{1n}\widetilde{A}_{11}X_n &= b_1\widetilde{A}_{11}, \\ a_{21}\widetilde{A}_{21}X_1 + a_{22}\widetilde{A}_{21}X_2 + \ldots + a_{2n}\widetilde{A}_{21}X_n &= b_2\widetilde{A}_{21}, \\ &\vdots \\ a_{n1}\widetilde{A}_{n1}X_1 + a_{n2}\widetilde{A}_{n1}X_2 + \ldots + a_{nn}\widetilde{A}_{n1}X_n &= b_n\widetilde{A}_{n1}. \end{aligned}$$

Ko dobljene enačbe seštejemo in izpostavimo X_1, X_2, ..., oziroma X_n, dobimo

$$\begin{aligned} &X_1(a_{11}\widetilde{A}_{11} + a_{21}\widetilde{A}_{21} + \ldots + a_{n1}\widetilde{A}_{n1}) + \\ &X_2(a_{12}\widetilde{A}_{11} + a_{22}\widetilde{A}_{21} + \ldots + a_{n2}\widetilde{A}_{n1}) + \\ &\vdots \\ &X_n(a_{1n}\widetilde{A}_{11} + a_{2n}\widetilde{A}_{21} + \ldots + a_{nn}\widetilde{A}_{n1}) = b_1\widetilde{A}_{11} + b_2\widetilde{A}_{21} + \ldots + b_n\widetilde{A}_{n1}. \end{aligned}$$

Izraz $a_{11}\widetilde{A}_{11} + a_{21}\widetilde{A}_{21} + \ldots + a_{n1}\widetilde{A}_{n1}$ je enak $\det(A)$, saj gre za razvoj determinante po prvem stolpcu (glej po formulo (40) za $j = 1$). Vsi izrazi $a_{1k}\widetilde{A}_{11} + a_{2k}\widetilde{A}_{21} + \ldots + a_{nk}\widetilde{A}_{n1}$, $k \neq 1$, pa so enaki 0, saj gre za razvoj matrike po prvem stolpcu, v kateri je k-ti stolpec enak prvemu (glej formulo (43) za $j = 1$). Torej dobimo

$$X_1 \cdot \det(A) = b_1\widetilde{A}_{11} + b_2\widetilde{A}_{21} + \ldots + b_n\widetilde{A}_{n1}.$$

Če označimo

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

opazimo, da je $\det(A_1) = b_1\widetilde{A}_{11} + b_2\widetilde{A}_{21} + \ldots + b_n\widetilde{A}_{n1}$, saj je to ravno razvoj po prvem stolpcu matrike A_1. Torej je

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},$$

kjer smo privzeli, da je $\det(A) \neq 0$. V splošnem torej ugotovimo, da je

$$X_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

kjer je A_j matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da v njej j-ti stolpec zamenjamo s stolpcem desnih strani; torej s stolcpem $[b_1, \ldots, b_n]^T$.

Gornja izpeljava je temeljila na predpostavki, da je sistem sploh rešljiv. Dokazati pa je možno, da je ob predopstavki $\det(A) \neq 0$ sistem vedno rešljiv. Velja namreč

Izrek 96 (Cramerjevo pravilo) *Če ima sistem n linearnih enačb z n neznankami determinanto koeficientov različno od 0, je sistem enolično rešljiv in rešitve so*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

kjer je $\det(A)$ determinanta sistema, $\det(A_j)$ pa determinanta matrike, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo j-ti stolpec s stolpcem desnih strani. ■

Zgled 236 *Reši sistem*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

s pomočjo Cramerjevega pravila.

Rešitev. Determinanta sistema je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

zato res smemo uporabiti Cramerjevo pravilo. Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6, \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12, \end{aligned}$$

zato je

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{3}{3} = 1, \\ x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-6}{3} = -2, \\ x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-12}{3} = -4. \end{aligned}$$

Zgled 237 *Reši sistem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

s pomočjo Cramerjevega pravila.

Rešitev. Determinanta sistema je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 28,$$

zato res smemo uporabiti Cramerjevo pravilo. Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20, \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12, \end{aligned}$$

zato je

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \\ x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{28} = 0 \\ x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

8.6 Gaußova metoda za reševanje sistemov linearnih enačb

Iščemo vse rešitve sistema m linearnih enačb z n neznankami.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

V tem sistemu so a_{ij}, b_i dana realna števila, $x_1, \ldots, x_n$ pa neznanke. Običajno zapišemo koeficiente tega sistema v matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Stolpcu desnih strani lahko priredimo matriko

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

neznankam pa matriko

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

V matrični obliki lahko sistem enačb zapišemo kratko kot

$$Ax = b.$$

Če matriki A dodamo še stolpec b, dobimo matriko reda $m \times (n+1)$, ki ji pravimo *razširjena matrika sistema*:

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Razširjena matrika sistema popolnoma popiše sistem, zato lahko pri reševanju sistema računamo samo z matriko $\widetilde{A}$.

Sistem linearnih enačb rešujemo tako, da s pomočjo operacij, ki na rešitve sistema ne vplivajo, spreminjamo enačbe, dokler niso zapisane v takšni obliki, iz katere lahko rešitev kar preberemo. Takšne operacije so:

- Enačbo lahko pomnožimo z neničelnim številom.
- Eno enačbo lahko prištejemo drugi enačbi.
- Dve enačbi lahko med seboj zamenjamo.

Na matriki $\widetilde{A}$ se te operacije odražajo takole:

- Vrstico lahko pomnožimo z neničelnim številom.
- Eno vrstico lahko prištejemo drugi vrstici.
- Dve vrstici lahko med seboj zamenjamo.

Gornje operacije imenujemo *elementarne vrstične operacije*. Pravimo, da sta matriki A in A' *vrstično ekvivalentni*, če lahko eno preoblikujemo v drugo z zaporednjem elementarnih vrstičnih operacij. Dve vrstično ekvivalentni razširjeni matriki predstavljata sistema z enakima množicama rešitev.

Izrek 97 (Gaußova eliminacija) *Vsaka matrika A je vrstično ekvivalentna matriki A', ki ima na prvem mestu neničeln element kvečjemu v prvi vrstici, v vsaki naslednji vrstici pa ima na začetku vsaj eno ničlo več kot v prejšnji.*

Dokaz. V matriki A najprej poiščemo vrstico, ki ima na skrajni levi neničeln element (lahko se zgodi, da ima matrika v prvih $i-1$ stolpcih same ničle in je ta element šele v i-tem stolpcu) in jo z zamenjavo vrstic postavimo na vrh. Če ima druga vrstica pod tem neničelnim elementom ničlo, jo pustimo, sicer pa od nje odštejmo prvo vrstico, pomnoženo s kvocientom obeh prvih členov. S tem dosežemo, da bo na tem mestu v drugi vrstici ničla. Na podoben način naredimo ničle na preostalih mestih v i-tem stolpcu. Prva vrstica in prvih i stolpcev so tako v pravi obliki, na preostalem delu matrike pa postopek ponovimo.

Zgled 238 *Reši sistem enačb:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 14 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 9 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 16 \end{array}$$

Rešitev. Danemu sistemu lahko priredimo razširjeno matriko

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

V prvem koraku s pomočjo označenega neničelnega elementa (tj. **1**) uničimo elementa pod njim. Prvo vrstico pomnožimo z -2 in jo prištejemo drugi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

Prvo vrstico pomnožimo z -3 in jo prištejemo tretji:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right]$$

Drugo vrstico pomnožimo z -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right]$$

Drugo vrstico pomnožimo z -2 in jo prištejemo prvi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -24 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right]$$

Drugo vrstico pomnožimo z 2 in jo prištejemo tretji:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -24 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right]$$

Tretjo vrstico delimo z -6:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -24 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Tretjo vrstico pomnožimo z 8 in jo prištejemo drugi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Tretjo vrstico pomnožimo z -13 in jo prištejemo prvi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Dobljena razširjena matrika ustreza sistemu enačb

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ y &= 3, \\ z &= -2, \end{aligned}$$

kar pravzaprav pomeni, da smo sistem enačb rešili. ■

Opomba. Postopek običajno zapišemo krajše:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -24 \\ 0 & 1 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Zgled 239 *Poišči vse rešitve sistema* $2y + 3z = 1$, $2x - 6y + 7z = 0$, $x - 2y + 5z = -1$.

Rešitev. Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

Računajmo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Zadnja vrstica dobljene razširjene matrike ustreza enačbi $0x + 0y + 0z = 3$, kar pomeni, da sistem ni rešljiv. ■

Zgled 240 *Reši sistem enačb* $x + 2y - z = 1$ *in* $x - y + 2z = 2$.

Rešitev.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Računajmo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Dobljena razširjena matrika sistema ustreza enačbama $x + z = \frac{5}{3}$ in $y - z = -\frac{1}{3}$. Tu lahko vrednost spremenljivke z poljubno izberemo. Potem je rešitev enaka $x = \frac{5}{3} - z$ in $y = -\frac{1}{3} + z$. ■

Gornji trije primeri kažejo, da je lahko sistem linearnih enačb

- enolično rešljiv (zgled 238),
- nerešljiv (zgled 239) ali
- pa je rešljiv, vendar je rešitev neskončno (zgled 240).

Te tri možne izide lahko prepoznamo tudi že pri reševanju z Gaußovo metodo.

Naj bo $\widetilde{A}$ razširjena matrika sistema m enačb z n neznankami. Po izreku 97 lahko $\widetilde{A}$ preoblikujemo v tako matriko $\widetilde{A}'$, ki ima na prvem mestu neničeln element kvečjemu v prvi vrstici, v vsaki naslednji vrstici pa ima na začetku vsaj eno ničlo več kot v prejšnji. Recimo, da je v matriki $\widetilde{A}'$ natanko r vrstic neničelnih.

Če med neničelnimi vrsticami obstaja kakšna, kjer je neničeln le zadnji element v tej vrstici, je sistem protisloven. V nasprotnem pa mora biti $r \leq n$. Če je $r = n$, je sistem enolično rešljiv, če pa je $r < n$, lahko r neznank enolično izrazimo s pomočjo preostalih $n - r$ neznank, katerih vrednosti so lahko poljubne. V tem primeru pravimo, da ima sistem enačb $(n - r)$-parametrično družino rešitev.

8.7 Rang matrike

Rang matrike je red največje kvadratne matrike v pravokotni matriki A, ki ima determinanto različno od 0. Če je A matrika razsežnosti $m \times n$, je $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$. Če je A kvadratna matrika razsežnosti $n \times n$, je $\operatorname{rang} A = n$ natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Rang matrike se ne spremeni,

- če vrstico v matriki pomnožimo z neničelnim številom,
- če vrstico v matriki prištejemo kakšni drugi vrstici in
- če dve vrstici med seboj zamenjamo.

Gornje operacije imenujemo *elementarne vrstične operacije*. Pravimo, da sta matriki A in A' *vrstično ekvivalentni*, če lahko eno preoblikujemo v drugo z zaporednjem elementarnih vrstičnih operacij.

Zgled 241 *Določi rang matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev. Po vrsti izvajamo elementarne vrstične operacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -3 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker so vse determinante razsežnosti 3×3 ničelne, je $\operatorname{rang}(A) \leq 2$. Ker je označena determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ neničelna, je $\operatorname{rang}(A) \geq 2$. Torej je $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Izrek 98 (Izrek o rešljivosti sistemov) *Sistem m linearnih enačb z n neznankami*

$$Ax = b$$

z razširjeno matriko sistema $\widetilde{A}$ je rešljiv natanko tedaj, ko imata matriki A in $\widetilde{A}$ enaka ranga; tj. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \widetilde{A} = r$. *Če je $r = n$, je sistem enolično rešljiv. Če je $r < n$, lahko za $n - r$ neznank izberemo poljubne vrednosti, ostalih r pa je z njimi natanko določenih.*

Zgled 242 *Poišči vse rešitve sistema enačb*

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & +9x_5 & = & 1, \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +5x_5 & = & 2, \\ 2x_1 & +11x_2 & +12x_3 & +25x_4 & +22x_5 & = & 4. \end{array}$$

Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right].$$

S pomčjo Gaußove eliminacije jo preoblikujemo v

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Ker je rang matrike A sistema enak 2, rang razširjene matrike $\widetilde{A}$ pa 3, sistem ni rešljiv.

Zgled 243 *Poišči vse rešitve sistema enačb*

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0, \\ 5x_1 & +3x_2 & +8x_3 & -x_4 & = & 1. \end{array}$$

Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

S pomčjo Gaußove eliminacije jo preoblikujemo v

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -16 & -4 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Iz 3. vrste razberemo, da je $x_4 = 0$. Iz 2. vrste razberemo, da je $x_2 + \frac{6}{11}x_3 = \frac{2}{11}$. Torej lahko izrazimo $x_2 = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{2}{11}$. Podobmo lahko zapišemo, da je $x_1 = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{1}{11}$. Rešitve sistema so torej

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{14}{11}x_3 + \frac{1}{11}, \\ x_2 &= -\frac{6}{11}x_3 + \frac{2}{11}, \\ x_4 &= 0, \end{aligned}$$

kjer je x_3 poljubno realno število.

Poudariti velja, da je to povsem v skladu s teorijo. Rang matrike A je enak $r = 3$ in je enak rangu razširjene matrike $\widetilde{A}$. Ker imamo $n = 4$ neznanke, smo lahko $r = 3$ med njimi izrazili s pomočjo $n - r = 1$ parametrov.

Zgled 244 *Poišči vse rešitve sistema enačb*

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 2, \\ x_1 & +4x_2 & +5x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & +3x_2 & -7x_3 & = & 5. \end{array}$$

Razširjena matrika sistema je

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 5 \end{array}\right],$$

kjer smo zaradi računske ugodnosti zamenjali 1. in 2. vrstico. S pomčjo Gaußove eliminacije jo preoblikujemo v

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & 8 \\ 0 & 15 & 8 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Sistem je torej enolično rešljiv, rešitve pa so

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{19}{5}, \\ x_2 &= \frac{4}{5}, \\ x_3 &= -2. \end{aligned}$$

8.8 Inverz matrike

Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obstaja taka matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $AB = BA = I_n$, pravimo, da je matrika A *obrnljiva*, matrika B pa *inverz matrike* A. Inverz matrike A označimo z A^{-1}.

- Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je obrnljva natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$.
- Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva, je obrnljiva tudi matrika A^{-1} in velja
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
- Če sta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi, je obrnljiva tudi matrika $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in velja
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Računanje inverza s pomočjo Gaußove eliminacije Naj bo torej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana matrika. Iščemo matriko $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da bo $AX = I$. Skratka

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]}_{A} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{array}\right]}_{X} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array}\right]}_{I}.$$

Če z x_j označimo j-ti stolpec matrike X, z b_j pa j-ti stolpec matrike I, vidimo, da je v gornji matrični enačbi pravzaprav skritih n sistemov enačb:

$$Ax_j = b_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ker imajo sistemi enačb $Ax_j = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, isto matriko koeficientov, jih lahko rešujemo hkrati. Če torej matriko A razširimo desno z identično matriko I, tj.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right],$$

in s pomočjo Gaußove eliminacije preoblikujemo to matriko v

$$[I|B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right],$$

je $B = A^{-1}$.

Zgled 245 *Izračunaj inverz matrike* $A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}\right]$.

Razširjena matrika je

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sledi

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Zgled 246 *Izračunaj inverz matrike* $A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

Razširjena matrika je

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Sledi

$$\begin{aligned} [A|I] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Torej je

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right].$$

Računanje inverza s pomočjo prirejenke Vrnimo se še enkrat k sistemu enačb $Ax_j = b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Če pišemo

$$x_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix},$$

lahko po Cramerjevem pravilu zapišemo

$$x_{ij} = \frac{\det(B_{ij})}{\det(A)},$$

kjer je matrika B_{ij} enaka matriki A, v kateri smo i-ti stolpec zamenjali s stolpcem b_j. Torej je $\det(B_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, kjer je A_{ji} poddeterminanta elementa a_{ji} v matriki A.

Izrek 99 *Če je* $\det(A) \neq 0$*, je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\widetilde{A})^T,$$

kjer je $\widetilde{A}$ prirejenka *matrike A, torej matrika z elementi* $\widetilde{A} = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]$*, kjer je* A_{ij} *matrika, ki jo dobimo iz matrike A, tako, da v njej odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec.*

Opomba. V računski praksi **skoraj vedno** računamo inverz matrike s pomočjo Gaußove eliminacije, saj bi morali pri računanju inverza s pomočjo prirejenke izračunati $n^2 + 1$ determinant reda $(n-1) \times (n-1)$.

Zgled 247 *Izračunaj inverz matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Za matriko A je $\det(A) = -5$ in

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Zgled 248 *Izračunaj inverz matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Za matriko A je

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

in

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Inverz matrike je tesno povezan z reševanjem sistemov enačb. Recimo, da imamo linearen sistem n enačb z n neznankami, ki ga v matrični obliki zapišemo kot $Ax = b$. Če je $\det A \neq 0$, obstaja A^{-1}. Torej je $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ oziroma

$$x = A^{-1}b.$$

Sistem je torej enolično rešljiv. Njegovo rešitev izračunamo tako, da najprej izračunamo A^{-1}, nato pa matriko $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pomnožimo z matriko $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ in dobimo $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Zgled 249 *Naj bo* $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Reši matrično enačbo*

$$AX + B^2 = 7I.$$

Enačbo najprej preoblikujemo

$$\begin{aligned} AX + B^2 &= 7I, \\ AX &= 7I - B^2, \\ X &= A^{-1}(7I - B^2). \end{aligned}$$

Sedaj pa po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \\ 7I - B^2 &= 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \\ \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je

$$X = A^{-1}(7I - B^2) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

9 Funkcije več spremenljivk

9.1 Graf funkcije več spremenljivk

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ poljubna (neprazna) množica. *Realna funkcija več spremenljivk* je preslikava $f\colon D \to \mathbb{R}$. Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke lahko tudi sedaj definiramo *zalogo vrednosti* funkcije f. Torej

$$Z_f = \{f(x) \in \mathbb{R}; x \in D\}.$$

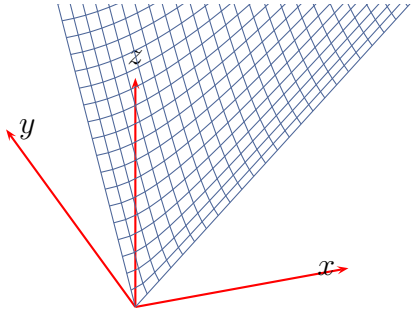
Graf funkcije več spremenljivk $f\colon D \to \mathbb{R}$ je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ x \in D \text{ in } f(x) = y\}.$$

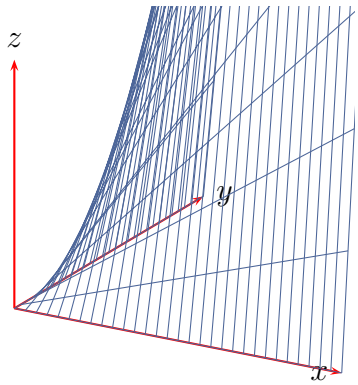
Posebej: graf funkcije dveh spremenljivk $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, je ploskev v prostoru, ki leži nad definicijskim območjem funkcije f.

Zgledi funkcij več spremenljivk.

- Za točko (x, y) v ravnini (tj. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) je s predpisom $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ podana funkcija dveh spremenljivk $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki podaja razdaljo te točke do koordinatnega izhodišča.



- Ploščina pravokotnika v ravnini je funkcija $p\colon (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $p(x, y) = xy$.



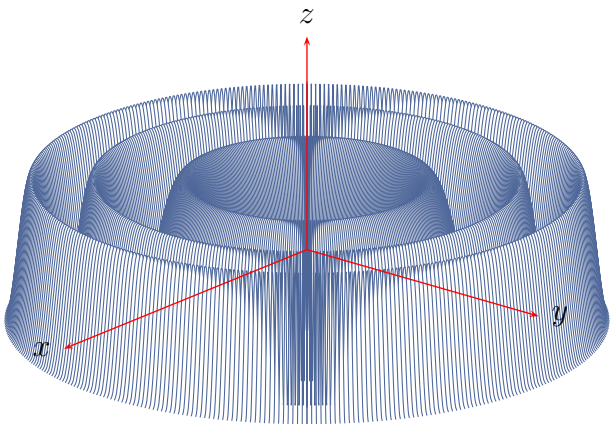
- Ploščina trikotnika je funkcija treh sprememljivk

$$t(x, y, z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}.$$

Definicijsko območje funkcije t je množica točk v $\mathbb{R}^3$, določena s pogoji.

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y - z > 0,\ y + z - x > 0,\ z + x - y > 0.$$

Zgled 250 *Nariši graf funkcije* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, podane s predpisom* $f(x, y) = \sin(\pi(x^2 + y^2))$.



Funkcijo dveh spremenljivk lahko ponazorimo tudi drugače. Naj bo $z \in Z_f$ poljubna točka iz zaloge vrednosti funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$. Če je funkcija f dovolj lepa, je množica točk

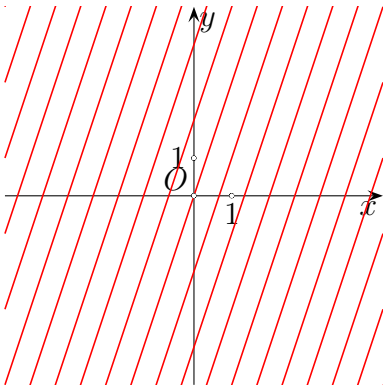
$$\{(x, y) \in D; f(x, y) = z\}$$

krivulja v D, ki jo imenujemo *nivojska krivulja* funkcije f. Očitno je, da vsaka točka $(x, y) \in D$ leži na natanko eni nivojski krivulji.

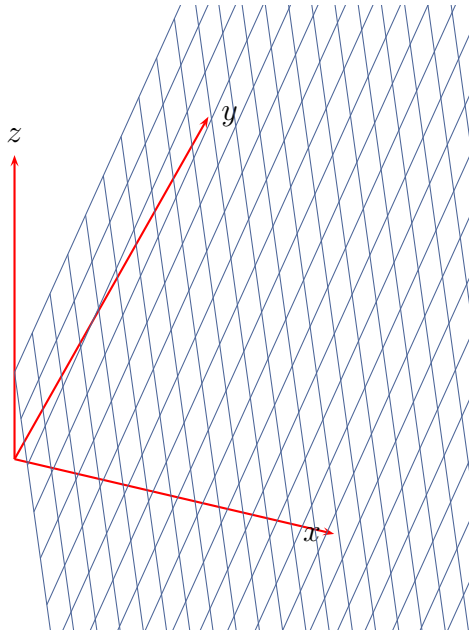
Nivojske krivulje uporabljamo vsakodnevno. Izobare na vremenski karti so nivojske krivulje funkcije, ki predstavlja zračni tlak na nekem območju. Izohipse na zemljevidu so nivojske krivulje funkcije, ki meri nadmorsko višino na nekem območju.

Zgled 251 *Kaj so nivojske krivulje funkcije* f*, podane s predpisom* $f(x, y) = 3x - 4y + 2$*? Skiciraj graf funkcije* f*.*

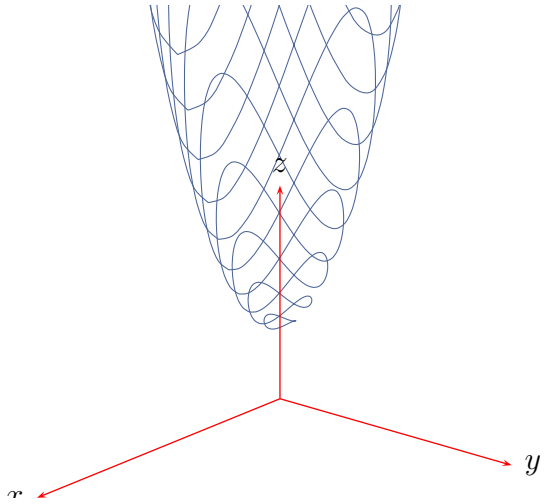
Nivojske krivuje so podane z enačbo $3x - 4y + 2 = z$. Torej je $y = \frac{1}{4}(3x + 2 - z)$. Nivojske krivuje so snop vzporednih premic.



Graf te funkcije predstavlja ravnino v prostoru.



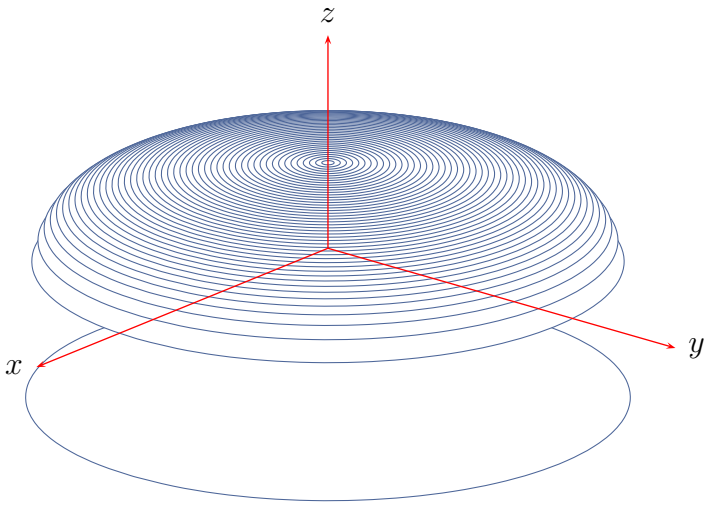
Zgled 252 *Kaj so nivojske krivulje funkcije f, podane s predpisom $f(x,y) = 1+x^2+3y^2$? Skiciraj graf funkcije f.*



Nivojske krivuje so podane z enačbo $1+x^2+3y^2 = z$. Ker od tod sledi $x^2+3y^2 = z-1$, so nivojske krivulje elipse. Ker je $x^2 + 3y^2 \geq 0$, mora biti $z \geq 1$.

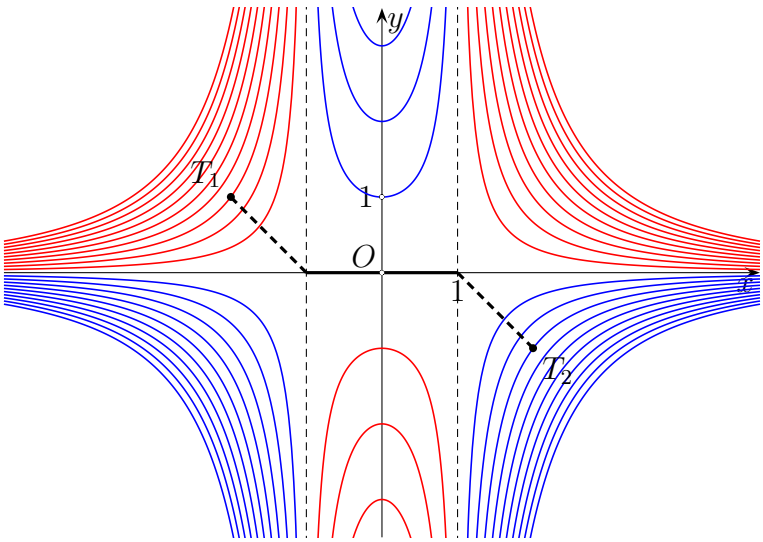
Zgled 253 *Kaj so nivojske krivulje funkcije f, podane s predpisom $f(x,y) = \ln(16-x^2-y^2)$? Skiciraj graf funkcije f.*

Določimo najprej definicijsko območje funkcije f. Ker mora veljati $16 - x^2 - y^2 > 0$, je $x^2 + y^2 < 16$. Torej je funkcija f definirana na odprtem krogu s središčem v $(0,0)$ in polmerom 4. Iz enačbe $\ln(16 - x^2 - y^2) = z$ sledi, da je $16 - x^2 - y^2 = e^z$. Torej je $x^2 + y^2 = 16 - e^z$, kar zaradi $x^2 + y^2 \geq 0$ pomeni, da mora biti $16 - e^z \geq 0$ oz. $z \leq \ln 16$. Nivojnice so krožnice, ki se zgostijo proti robu definicijskega območja funkcije f.



Zgled 254 *Kako naj se planinec poda od* $T_1(-2,1,3)$ *do* $T_2(2,-1,-3)$ *po ploskvi, podani kot graf funkcije* $z = y(x^2-1)$*, če naj se med potjo ne vzpenja?*

Premice $y = 0$, $x = -1$ in $x = 1$ so nivojnice ploskve pri $z = 0$. Če planinec prečka to nivojnico, se nanjo ne more več vrniti. Pot planinca med točkama $A(-1,0,0)$ in $B(1,0,0)$ je torej natančno določena. Začetni del poti (spust od T_1 do A) in končni del poti (spust od B do T_2) pa nista natančno določena, planinec mora paziti le, da se ne vrne na nivojnico, na kateri je že bil.



Zgled 255 *Skiciraj ploskev z enačbo* $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Nivojnice zadoščajo enačbi $z = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$. Torej je $z > 0$. Sledi $\ln z = -\frac{1}{x^2+y^2}$ oz. $x^2+y^2 = -\frac{1}{\ln z}$. Ker mora biti $-\frac{1}{\ln z} > 0$ od tod sledi $\ln z < 0$ in $z \in (0,1)$. Iz enačbe $x^2+y^2 = -\frac{1}{\ln z}$ nazadnje vidimo, da so nivojnice kar koncentrične krožnice.

Zgled 256 *Skiciraj ploskev z enačbo* $f(x,y) = \ln x + 2\ln y + \ln(4-x-y)$.

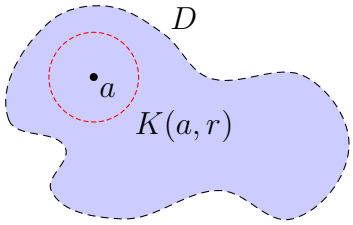
9.2 Odprte množice in okolice

Kot običajno označimo množico realnih števil z $\mathbb{R}$, množico $\overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}^{n \text{ faktorjev}}$ pa z $\mathbb{R}^n$.

Prostor $\mathbb{R}^n$ je *metričen prostor*, v katerem merimo razdaljo na običajen, Evklidski način. Razdaljo med točkama $x, y \in \mathbb{R}^n$ označimo z $\mathrm{dist}(x,y)$ in velja $\mathrm{dist}(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$, kjer je $x=(x_1,\ldots,x_n)$ in $y=(y_1,\ldots,y_n)$. Če na $\mathbb{R}^n$ pogledamo kot na *vektorski prostor*, je $\mathrm{dist}(x,y)=\|x-y\|$, kjer je $x-y$ razlika vektorjev x in y, $\|x-y\|$ pa *norma* oz. dolžina vektorja $x-y$.

Množica $K(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \mathrm{dist}(x,a)<r\}$ je *odprta krogla* s središčem v a in polmerom r. Množica $\bar{K}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \mathrm{dist}(x,a)\le r\}$ je *zaprta krogla* s središčem v a in polmerom r.

Množica $D\subset\mathbb{R}^n$ je *odprta*, če za vsako točko $a\in D$ obstaja tak $r>0$, da za vsak $x\in\mathbb{R}^n$, ki zadošča pogoju $\mathrm{dist}(x,a)<r$, velja $x\in D$.



Torej lahko rečemo, da je množica D odprta, če leži vsaka točka te množice v neki odprti krogli, ki v celoti leži v D.

Odprta okolica točke $a\in\mathbb{R}^n$ je poljubna odprta množica, ki vsebuje točko a v svoji notranjosti, ε-okolica točke $a\in\mathbb{R}^n$ pa je sinonim za odprto kroglo $K(a,\varepsilon)$.

Zgled 257 *Opiši odprte in zaprte krogle v* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *v običajni Evklidski metriki.*

V običajni Evkidski metriki v $\mathbb{R}$ je

$$\mathrm{dist}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2}=|x_1-y_1|.$$

Torej je odprta krogla s polmerom r in središčem v a enaka

$$K(a,r)=\{x\in\mathbb{R};\ |x-a|<r\}=(a-r,a+r),$$

zaprta krogla s polmerom r in središčem v a pa je enaka

$$\bar{K}(a,r)=\{x\in\mathbb{R};\ |x-a|\le r\}=[a-r,a+r].$$

V običajni Evkidski metriki v $\mathbb{R}^2$ velja

$$\mathrm{dist}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

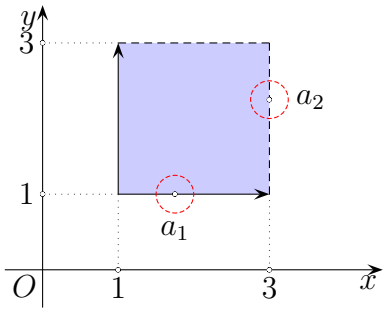
Torej je odprta krogla s polmerom r in središčem v a enaka

$$\begin{aligned} K(a,r) &= \{x\in\mathbb{R}^2;\ \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<r\}= \\ &= \{x\in\mathbb{R}^2;\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<r^2\}, \end{aligned}$$

zaprta krogla s polmerom r in središčem v a pa je enaka

$$\begin{aligned} \bar{K}(a,r) &= \{x\in\mathbb{R}^2;\ \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\le r\}= \\ &= \{x\in\mathbb{R}^2;\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\le r^2\}. \end{aligned}$$

Zgled 258 *Naj bo* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x < 3; 1 \leq y < 3\}$. *Ali je množica* X *odprta v* $\mathbb{R}^2$*? Ali je množica* $\mathbb{R}^2 \setminus X$ *odprta v* $\mathbb{R}^2$*?*



Množica X ni odprta v $\mathbb{R}^2$, saj noben odprt krog s središčem v točki a_1 ne leži v celoti v X. Tudi množica $\mathbb{R}^2 \setminus X$ ni odprta v $\mathbb{R}^2$, saj noben odprt krog s središčem v točki a_2 ne leži v celoti v $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

9.3 Zveznost

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je *zvezna v točki* $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za točke, ki zadoščajo pogoju $\operatorname{dist}(x, a) < \delta$, velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Funkcija f je *zvezna na množici* D, če je za vsako točko $a \in D$ funkcija f zvezna v točki a.

Opazimo, da se za $n = 1$ ta definicija ujema z običajno definicijo zveznosti za funkcije ene spremenljivke, saj v $\mathbb{R}$ velja $\operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\| = |x - y|$, kjer smo z $|x - y|$ označili absolutno vrednost realnega števila $x - y$.

Naj bo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. S $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ označimo *projekcijo* na i-to koordinato.

Izrek 100 *Projekcija* $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je zvezna funkcija.*

Za točko $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ velja $p_i(x) - p_i(a) = x_i - a_i$. Ker je $d(x, a) = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$, velja

$$|p_i(x) - p_i(a)| \leq d(x, a).$$

Torej lahko pri izbranem $\varepsilon > 0$ postavimo $\delta = \varepsilon$ in bo iz $d(x, a) < \delta$ res sledilo $|p_i(x) - p_i(a)| < \varepsilon$. ■

Osnovne računske operacije $+$, $-$, $\cdot$ lahko prepoznamo kot funkcije dveh spremenljivk, npr. seštevanje je funkcija $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$. Tudi deljenje lahko prepoznamo kot funkcijo dveh spremenljivk, le na definicijsko območje je potrebno paziti: $g\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

Izrek 101 *Osnovne računske operacije so kot funkcije dveh spremenljivk zvezne povsod, kjer so definirane.*

Dokaz. Izberimo poljubno točko $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in dokažimo, da je funkcija s, $s(x, y) = x + y$, zvezna v točki (a, b). Naj bo $\varepsilon > 0$ in postavimo $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Če je

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta,$$

je tudi $|x-a|<\delta$ in $|y-b|<\delta$. Torej je res

$$|s(x,y)-s(a,b)|=|x+y-a-b|\le|x-a|+|y-b|<2\cdot\delta=\varepsilon.$$

Podobno dokažemo tudi zveznost odštevanja, torej zveznost funkcije $(x,y)\mapsto x-y$.

Izberimo poljubno točko $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ in dokažimo, da je funkcija m, $m(x,y)=x+y$, zvezna v točki (a,b). Naj bo $\varepsilon>0$ in postavimo $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1},1\}$. Podobno kot prej iz

$$\|(x,y)-(a,b)\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta,$$

sledi $|x-a|<\delta$ in $|y-b|<\delta\le 1$; torej je $|y|<|b|+1$. Računajmo

$$\begin{aligned}|m(x,y)-m(a,b)| &= |xy-ab|=|(x-a)y+a(y-b)|\le\\ &\le |x-a|\cdot|y|+|a|\cdot|y-b|<\\ &< \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}\cdot(|b|+1)+|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Izberimo poljubno točko $(a,b)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ in dokažimo, da je funkcija $v\colon\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$, $v(x,y)=\frac{x}{y}$, zvezna v točki (a,b). Če postavimo $\delta=\min\{\frac{\varepsilon b^2}{2(|a|+|b|)},\frac{1}{2}|b|\}$, velja

$$\begin{aligned}|v(x,y)-v(a,b)| &= \left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|xb-ay|}{|by|}=\frac{|(x-a)b-a(y-b)|}{|by|}\le\\ &\le \frac{|x-a|\cdot|b|+|a|\cdot|y-b|}{|b|\cdot|y|}<\frac{(|b|+|a|)\delta}{|b|\cdot|y|}<\varepsilon,\end{aligned}$$

saj je $|y|>\frac{|b|}{2}$ in $\delta\le\frac{\varepsilon b^2}{2(|a|+|b|)}$. ■

Izrek 102 *Naj bo $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je $g\circ f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zvezna funcija.*

Dokaz. Izberimo $a\in D$ in postavimo $b=f(a)$. Naj bo $\varepsilon>0$. Potem obstaja $\delta_1>0$, da za $|y-b|<\delta_1$ velja $|g(y)-g(b)|<\varepsilon$. Torej obstaja $\delta>0$, da za $\|x-a\|<\delta$ velja $|f(x)-f(a)|<\delta_1$. Torej za $\|x-a\|<\delta$ res velja $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$. ■

Če sedaj združimo gornje izreke, lahko ugotovimo, da so tudi "elementarne" funkcije več spremeljivk zvezne povsod, kjer so definirane.

Zgled 259 *Dokaži, da je $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$, zvezna funkcija.*

Funkcijo f lahko predstavimo kot kompozitum nekaj zveznih funkcij.

$$(x,y)\xrightarrow{p_1} x\xrightarrow{q} x^2\xrightarrow{s} x^2+y^2\xrightarrow{g}\ln(x^2+y^2+1)$$
$$(x,y)\xrightarrow{p_2} y\xrightarrow{q} y^2\xrightarrow{s} x^2+y^2$$

Uporabljene so zvezne funkcije dveh spremenljivk: $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$, $s(x,y)=x+y$ ter zvezni funkciji ene spremenljivke $q(t)=t^2$, $g(t)=\ln(t+1)$. ■

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke lahko definiramo *limito*: Število A je limita funkcije f v točki a, oznaka $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da iz $0<\operatorname{dist}(x,a)<\delta$ sledi $|f(x)-A|<\varepsilon$. Iz definicije torej sledi, da funkcijska vrednost v točki a ne vpliva na vrednost $\lim\limits_{x\to a}f(x)$. (Potrebno ni niti, da je funkcija f sploh definirana v točki a.)

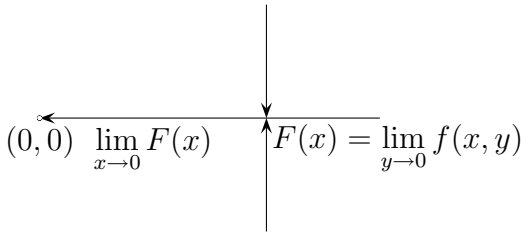
Izrek 103 *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$, natanko tedaj, ko je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Zgled 260 *Naj bo $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Izračunaj limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Limito $L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ izračunamo tako, da pri fiksnem $x \neq 0$ izračunamo $\lim_{y\to 0} f(x,y)$, nato pa dobljeneni izraz po x limitiramo k 0. Torej $\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$ in zato $L_1 = \lim_{x\to 0}(1) = 1$.

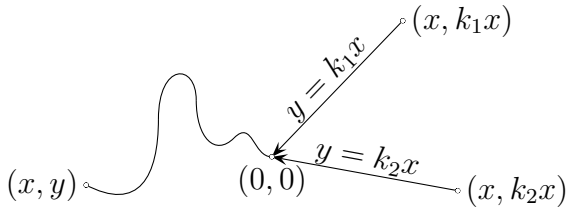
Podobno za $y \neq 0$ najprej izračunamo $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ in odtod $L_2 = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$.



Dokažimo nazadnje, da limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne obstaja. Če bi ta limita obstajala, bi bila neodvisna od smeri približevanja $(x,y) \to (0,0)$. Postavimo $y = kx$. Če bi torej limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ obstajala, bi bila enaka limiti $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ za vsak k. Računajmo:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Izračunali smo, da limita $\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ obstaja za vsak k, vendar je njena vrednost za vsak k drugačna. Torej limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne obstaja.



Zgled 261 *Naj bo $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Izračunaj limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Pri danem $x \neq 0$ je seveda $L_1 = \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$ in zato $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$. Podobno je tudi $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$. Čeprav sta sedaj ponovljeni limiti enaki, tudi to ni dovolj za zveznost. Postavimo $y = kx$ in izračunajmo *radialno limito*

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Enako kot prej lahko sklepamo, da limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne obstaja, saj so radialne limite različne.

Zgled 262 *Naj bo* $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. *Izračunaj limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Naj bo $x \neq 0$. Potem limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

ne obstaja. Podobno za $y \neq 0$ tudi limita ne obstaja

$$\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Po drugi strani pa lahko ocenimo

$$|f(x,y)| = |x+y|\cdot|\sin\frac{1}{x}|\cdot|\sin\frac{1}{y}| \leq |x|+|y|,$$

saj je sinus navzgor omejen z 1. Ker velja $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$, je tudi

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$$

in zato

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Gornji primeri kažejo, da je obravnavanje zveznosti funkcije več spremenljivk težavnejše od obravnavanja zveznosti funkcije ene spremenljivke in da si pri tem ne moremo pomagati s ponovljenimi limitami (tj. limitami oblike $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$.)

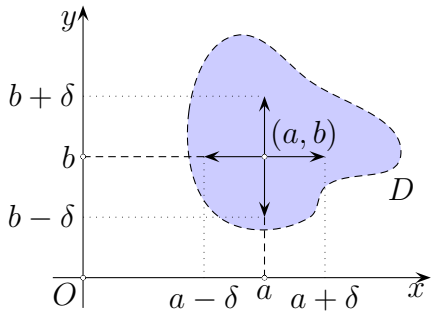
Naj bo D odprta množica in $f\colon D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Za poljubno točko $(a,b) \in D$ lahko definiramo funkciji $f_1\colon D_x \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = f(x,b)$, in $f_2\colon D_y \to \mathbb{R}$, $f_2(y) = f(a,y)$, definirani na majhnih okolicah D_x in D_y točk a oz. b.

Izrek 104 *Če je f zvezna funkcija v točki (a,b), je funkcija f_1 zvezna v a, funkcija f_2 pa zvezna v b.*

Dokaz. Poglejmo natančno definicijo zveznosti funkcije f. Pri danem $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ velja $|f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$. Ker pa iz $|x-a| < \delta$ sledi, da je

$$\|(x,b)-(a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(b-b)^2} = |x-a| < \delta,$$

je $|f(x,b)-f(a,b)| < \varepsilon$. Če upoštevamo, da je $f(x,b) = f_1(x)$, smo tako dokazali, da je $|f_1(x)-f_1(a)| < \varepsilon$. Torej je f_1 zvezna funkcija v točki a. Podobno dokažemo, da je f_2 zvezna funkcija v točki b. ■



Opozoriti velja, da ne velja obrat gornjega izreka. Kot kaže primer 261 funkcija f ni zvezna v $(0,0)$, posamezni funkciji f_1 in f_2 pa sta zvezni v 0.

9.4 Parcialni odvodi

Naj bo D **odprta** množica v $\mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Naj bo $x = (x_1,\ldots,x_n) \in D$ in $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{h},$$

pravimo, da je funkcija f *parcialno odvedljiva na spremenljivko* x_i v točki x in označimo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{h}.$$

Neposredno iz definicije sledi, da je $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ spet funkcija iz D v $\mathbb{R}$. Če je ta funkcija parcialno odvedljiva na x_j, obstaja $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f$, kar lahko krajše zapišemo kot $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Če je $i = j$, označimo kar $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Če je funkcija $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ zvezna, lahko vrstni red parcialnega odvajanja tudi zamenjamo. Torej je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. V splošnem primeru, torej ko je funkcija f k-krat, $k = (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)$, zvezno odvedljiva, vrstni red odvajanja pri funkciji $\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}$ ni pomemben.

Zgled 263 *Izračunaj* $\frac{\partial}{\partial x} f$ *in* $\frac{\partial}{\partial y} f$ *za* $f(x,y) = x^y$.

Izračunamo $\frac{\partial}{\partial x} f = y x^{y-1}$ in $\frac{\partial}{\partial y} f = x^y \ln x$.

Zgled 264 *Izračunaj* $\frac{\partial}{\partial x} f$ *in* $\frac{\partial}{\partial y} f$ *za* $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.

Izračunamo $\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{2y}{(x+y)^2}$ in $\frac{\partial}{\partial y} f = -\frac{2x}{(x+y)^2}$.

Zgled 265 *Izračunaj* $\frac{\partial}{\partial x}f$ *in* $\frac{\partial}{\partial y}f$ *za* $f(x,y) = \ln\tan\frac{x}{y}$.

Izračunamo $\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$ in $\frac{\partial}{\partial y}f = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

Zgled 266 *Izračunaj* $\frac{\partial}{\partial x}f$ *in* $\frac{\partial}{\partial y}f$ *za* $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

Izračunamo $\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in $\frac{\partial}{\partial y}f = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

Zgled 267 *Izračunaj* $\frac{\partial}{\partial x}f$ *in* $\frac{\partial}{\partial y}f$ *za* $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

Izračunamo $\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{x|y|\sqrt{2(x^2-y^2)}}{x^4-y^4}$ in $\frac{\partial}{\partial y}f = -\frac{yx^2\sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|(x^4-y^4)}$.

Zgled 268 *Naj bo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{če je } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Parcialni odvod izračunamo po definiciji:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Pri tem zgledu velja omeniti, da funkcija f ni zvezna v $(0,0)$ kot funkcija dveh spremenljivk, je pa zvezna v vsaki spremenljivki posebej.

Zgled 269 *Naj bo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x e^y - 1}{x+y}, & \text{če je } x \neq -y, \\ 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Parcialni odvod izračunamo po definiciji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h}{h^2} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

kjer smo si pri izračunu zadnjih dveh limit pomagali z L'Hospitalovim pravilom.

Zgled 270 *Izračunaj vse druge parcialne odvode funkcije* f, $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y$.

Velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 3y - 4 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2y + 3x + 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2
\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Zgled 271 *Izračunaj vse druge parcialne odvode funkcije f, $f(x, y) = \ln(x + y^2)$.*

Velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x + y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x + y^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(x + y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{2y}{(x + y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2(x + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Zgled 272 *Naj bo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{če je } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunaj $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Parcialna odvoda v točki $(x, y) \neq (0, 0)$ sta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Parcialna odvoda v $(0, 0)$ izračunamo po definiciji:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

in podobno

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Od tod sledi, da je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ za vsak y in $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ za vsak x. Torej je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

9.5 Totalni diferencial

Naj bo funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $(a,b) \in D$. Potem je razlika $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ hkrati s h in k majhna. Če obstajata taki števili $A, B \in \mathbb{R}$, da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

pravimo, da je f *diferenciabilna v točki* (a,b).

Ker velja

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

kakorkoli gre (h,k) proti $(0,0)$, lahko postavimo $k=0$ in $h>0$. Tedaj je

$$\lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)-Ah}{h} = 0,$$

kar pomeni, da je

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = A.$$

Ker pa je $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, smo tako dokazali, da je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. Podobno je $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Izraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

imenujemo *totalni diferencial funkcije* f v točki (a,b). Totalni diferencial pove, kako hitro se spreminja funkcijska vrednost funkcije f v okolici točke (a,b).
Pogosto totalni diferencial označimo krajše

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Naj bo $f(x) = xy$. Totalni diferencial je enak $df = y\,dx + x\,dy$. Odtod dobimo približek za relativno napako produkta dveh izmerjenih količin, če poznamo napaki pri merjenju dx in dy. Torej

$$\frac{df}{f} = \frac{ydx+xdy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

V praksi to pomeni, če poznamo dolžini stranic pravokotnika na a % in b % natančno, $a,b>0$, lahko izračunamo ploščino na $(a+b)$ % natančno.

Videli smo že, da je diferenciabilna funkcija parcialno odvedljiva na obe spremenljivki. Obrat pa v splošnem ne drži.

Izrek 105 *Če sta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezna v točki (a,b), je f diferenciabilna v točki (a,b).*

Zapišemo lahko $f(a+h,b+k)-f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)$. Po Lagrangeovem izreku je

$$f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,b+k)h$$

za neko točko x_1 med a in $a+h$ ter

$$f(a,b+k)-f(a,b+k)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,\xi_2)k$$

za neko točko x_2 med b in $b+k$. Izraz

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

lahko potem zapišemo kot vsoto členov

$$\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,b+k)h-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

in

$$\frac{f(a,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,\xi_2)k-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Ker pa je

$$\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_1,b)h-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|$$

in

$$\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,\xi_2)k-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,\xi_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|,$$

lahko lahko zaradi zveznosti parcialnih odvodov v točki (a,b) pri danem $\varepsilon>0$ najdemo tak $\delta>0$, da iz $\|(h,k)\|<\delta$ sledi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

in

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,\xi_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Torej je res

$$\left|\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|<\varepsilon.$$

Zgled 273 *Dokaži, da je f, $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$, diferenciabilna funkcija na območju $D=\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.*

Parcialna odvoda sta

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Ker sta funkciji $(x,y)\mapsto -\frac{y}{x^2+y^2}$ in $(x,y)\mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$ zvezni povsod na množici D, je f na množici D tudi diferenciabilna.

Zgled 274 *Izračunaj totalni diferencial funkcije f, $f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$.*

Izračunamo $df = -\frac{y^2}{x^2-y^2}dx + \frac{x^2}{x^2-y^2}dy = \frac{1}{x^2-y^2}(-y^2\,dx + x^2\,dy)$.

Zgled 275 *Izračunaj totalni diferencial funkcije f, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Izračunamo $df = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy)$.

Zgled 276 *Izračunaj približno $\sqrt{4.05^2+2.93^2}$.*

Označimo $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Izračunali smo že $df = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy)$. Postavimo $x=4$, $y=3$, $dx=0.05$ in $dy=-0.07$, pa dobimo

$$\begin{aligned}df &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy) =\\ &= \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4\cdot 0.05 + 3\cdot(-0.07)) = -0.002\ .\end{aligned}$$

Ker je $f(4,3)=5$, je $f(4.05, 2.93)\approx 5-0.002 = 4.998$. Pripomniti velja, da je bolj natančna vrednost enaka 4.99874.

Zgled 277 *Kako natančno lahko izračunaš nihajni čas matematičnega nihala, če poznaš g na 1% natančno, dolžimo ℓ pa na 5% natančno?*

Za nihajni čas velja formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Ker je

$$dT = \pi\frac{1}{\sqrt{\ell g}}d\ell - \pi\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g^3}}dg,$$

sledi od tod

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{d\ell}{\ell} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}.$$

Torej je

$$\left|\frac{dT}{T}\right| \le \left|\frac{1}{2}\frac{d\ell}{\ell}\right| + \left|\frac{1}{2}\frac{dg}{g}\right| \le 3\ \%.$$

Zgled 278 *Izračunaj $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}$ za $f(x,y)=\arcsin(x^2-y^2)$.*

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}$, je vrednost izraza enaka 0.

9.6 Verižno pravilo

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica. Naj bo funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferenciabilna, funkciji $x = x(t)$ in $y = y(t)$ pa naj bosta zvezni in odvedljivi funkciji parametra t. Potem je $F(t) = f(x(t), y(t))$ zvezna funkcija parametra t. Izračunajmo njen odvod:

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}.$$

Ker sta x in y zvezno odvedljivi, lahko po Lagrangeovem izreku zapišemo $x(t+h) = x(t) + x'(\xi)h$ in $y(t+h) = y(t) + y'(\psi)h$. Ker je f diferenciabilna, je

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \eta\sqrt{\Delta^2 u + \Delta^2 v},$$

kjer gre η hkrati z Δu in Δv proti 0. Torej je

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t))x'(\xi)h + \frac{\partial f}{\partial v}(x(t), y(t))y'(\psi)h + h\eta\sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\psi)^2}}{h} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x(t), y(t))y'(t), \end{aligned}$$

saj gresta ξ in ψ proti t, ko gre h proti 0.

Pravilo lahko zapišemo tudi v splošnem.

Izrek 106 *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferenciabilna, funkcije $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ pa naj bodo zvezne in odvedljive funkcije parametra t. Potem je $F(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ odvedljiva in velja*

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k'(t).$$

Če pa je tudi t funkcija več spremenljivk, pa lahko gornje pravilo še nekoliko posplošimo.

Izrek 107 *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $f, x_1, \ldots, x_n\colon D \to \mathbb{R}$ diferenciabilne funkcije. Potem je funkcija $g\colon D \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom*

$$g(t_1, \ldots, t_n) = f(x_1(t_1, \ldots, t_n), x_2(t_1, \ldots, t_n), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_n)),$$

diferenciabilna in za vsako točko $a \in D$ velja

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(b) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_i}(a),$$

kjer smo označili $b = (x_1(a), \ldots, x_n(a))$.

V posebnem primeru $n = 2$ za $f = f(x, y)$, $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$ enostavno zapišemo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

Zgled 279 *Izračunaj odvod funkcije f, podane s predpisom $f(x) = x^x$.*

Označimo $F(u, v) = u^v$, $u(x) = x$ in $v(x) = x$. Potem je

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= vu^v,\\ \frac{\partial F}{\partial v} &= u^v \ln u,\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 1,\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 1 \text{ in}\\ \frac{d}{dx}F(x) &= \frac{\partial}{\partial x}F(x) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =\\ &= xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x.\end{aligned}$$

Zgled 280 *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Izračunaj vse parcialne odvode drugega reda za funkcijo F, podano s predpisom $F(x, y) = f(x + y, xy)$.*

Uporabili bomo verižno pravilo za funkcije $f(u, v)$, $u(x, y) = x + y$ in $v(x, y) = xy$. Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}y,\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x,\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}y + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}y^2 =\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}x^2 =\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}y + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}xy + \frac{\partial f}{\partial v} =\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x + y)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

9.7 Taylorjeva formula

Videli smo že, da za majhne h in k velja ocena

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k.$$

Ocena je precej enostavna a ima veliko pomanjkljivost – ne moremo jo izboljšati. Če želo bolj natančno aproksimacijo, moramo uporabiti višje odvode.

Izrek 108 (Taylorjeva formula) *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-krat zvezno parcialno odvedljiva funkcija v okolici točke $(a,b) \in D$. Potem velja*

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-j} \partial y^j}(a,b) h^{i-j} k^j + R_n,$$

kjer je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(a+\vartheta h, b+\vartheta k) h^{n+1-j} k^j$$

za neki $\vartheta \in [0,1]$.

Naj bo $t \in [0,1]$. Označimo $F(t) = f(a+th, b+tk)$. Potem je f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija v okolici točke $t = 0$. Zapišimo Taylorjevo formulo za F.

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F'''(0)t^3 + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + R_n.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
F(0) &= f(a,b), \\
F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k, \\
F''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2, \\
&\vdots \\
F^{(n)}(0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\partial^i f}{\partial x^{i-j} \partial y^j}(a,b) h^{i-j} k^j.
\end{aligned}$$

Zgled 281 *Razvij funkcijo f, podano s predpisom $f(x,y) = e^{x+y}$, v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$.*

Seveda je $e^{x+y} = e^x e^y$. Ker za vsak i in j velja $\frac{\partial^i}{\partial x^{i-j} \partial y^j} e^x e^y = e^x e^y$, je $\frac{\partial^i f}{\partial x^{i-j} \partial y^j}(0,0) = 1$. Torej je

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} x^{i-j} y^j.$$

9.8 Lokalni ekstremi

Naj bo D **odprta** množica v $\mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija.

Funkcija f ima v točki $a \in D$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in K(a,\delta)$ velja $f(x) < f(a)$. Funkcija f ima v točki $a \in D$ *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in K(a,\delta)$ velja $f(x) > f(a)$. Če ima funkcija f v točki a lokalni maksimum ali lokalni minimum, pravimo, da ima f v točki a *lokalni ekstrem*.

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Točka a je *stacionarna*, če je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Zgled 282 *Določi stacionarne točke funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Ker je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{2x}(2y + 2), \end{aligned}$$

sta oba parcialna odvoda enaka 0 le v točki $y = -1$ in $x = \frac{1}{2}$. Stacionarna točka je $T(\frac{1}{2}, -1)$.

Zgled 283 *Določi stacionarne točke funkcije, podane s predpisom* $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

Parcialni odvodi so

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z}. \end{aligned}$$

Ker mora biti $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, sledi od tod, da je

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{y} = \frac{5}{z} = \frac{1}{22 - x - y - z} = \frac{1}{t}.$$

Od tod izrazimo $x = 3t$, $y = 2t$ in $z = 5t$. Z upoštevanjem zadnje enakosti dobimo

$$t = 22 - x - y - z = 22 - 10t,$$

kar nam da $11t = 22$ oziroma $t = 2$. Sledi $x = 6$, $y = 4$ in $z = 5$. Stacionarna točka je $T(6,4,10)$.

Izrek 109 *Če ima odvedljiva funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *v točki* $a \in D$ *lokalni ekstrem, je* a *stacionarna točka.*

Recimo, da ima funkcija f v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lokalni minimum. Potem ima tudi funkcija ene spremenljivke g, definirana z $g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n)$, v točki a_1 lokalni minimum. Po že dokazanem za funkcije ene spremenljivke to pomeni, da je $g'(a_1) = 0$ oziroma

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Podobno dokažemo še za ostale parcialne odvode.

Zgled 284 *Določi stacionarne točke funkcije, podane s predpisom $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ali je v tej točki ekstrem?*

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, sta oba parcialna odvoda enaka 0 le v točki $(x, y) = (0, 0)$. Očitno je $f(0, 0) = 0$ in $f(x, y) > 0$ za $(x, y) \neq (0, 0)$. Torej je v točki $(0, 0)$ celo globalni minumum.

Zgled 285 *Določi stacionarne točke funkcije, podane s predpisom $f(x, y) = xy$. Ali je v tej točki ekstrem?*

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, sta oba parcialna odvoda enaka 0 le v točki $(x, y) = (0, 0)$. Očitno je $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ za $x = y \neq 0$ in $f(x, y) < 0$ za $x = -y \neq 0$. Torej zavzame funkcija poljubno blizu točke $(0, 0)$ pozitivne in negativne vrednosti, zato v točki $(0, 0)$ ni ekstrema.

Zgled 286 *Določi stacionarne točke funkcije, podane s predpisom $f(x, y) = (x-y)^2$. Ali je v tej točki ekstrem?*

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y)$, sta oba parcialna odvoda enaka 0 na premici $x = y$.

Očitno je $f(x, y) \geq 0$ in $f(x, y) = 0$ le za $x = y$. V skladu z gornjo definicijo ekstrema pa v nobeni točki na tej premici ni ekstrema, saj poljubno blizu nje funkcija f zavzame vrednost 0. Ker pa v okolici vsake točke na premici zavzame le večje ali enake vrednosti, pa lahko točke s te premice imenujemo *nepopolni ekstremi*.

Videli smo že, da lahko ekstrem odvedljive funkcije nastopi le v stacionarni točki, niso pa vse stacionarne točke tudi ekstremi. Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke si o tem lahko pomagamo z drugimi odvodi.

Gornji izrek seveda ne zagotavlja, da je v stacionarni točki a ekstrem. Za podrobno analizo je potrebno poseči po višjih parcialnih odvodih.

Poglejmo si najprej primer $n = 2$. Dana je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$, ki ima stacionarno točko $(a, b) \in D$. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije f okoli točke (a, b) lahko za majhne h in k zapišemo

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a', b') + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a', b') + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a', b')\right), \quad (44)$$

kjer je $(a', b') = (a + \vartheta h, b + \vartheta k)$. Označimo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b). \end{aligned}$$

Če so drugi parcialni odvodi zvezni, je

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a',b') &= A+\eta\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a',b') &= B+\eta'\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a',b') &= C+\eta'',\end{aligned}$$

kjer so števila η, η', η'' poljubno majhna, če le sta h in k majhna. Enačbo (44) lahko zato preoblikujemo v

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right)+\frac{1}{2}\left(\eta h^2+2\eta' hk+\eta'' k^2\right). \qquad (45)$$

Če sta h in k dovolj majhna in izraz $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ ni enak 0, ima izraz $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ enak predznak kot $Ah^2+2Bhk+Ck^2$.

Če je torej izraz $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ pri majhnih h in k, $(k,h)\neq(0,0)$, stalnega predznaka, bo v točki (a,b) nastopil ekstrem. Ločimo nekaj primerov:

- Če je $A\neq 0$, lahko zapišemo

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}((Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2).$$

  - Če je $AC-B^2>0$, je izraz $(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2$ za neničelna h in k pozitiven. Če je $A<0$, je $f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$ blizu (a,b) in nastopi lokalni maksimum. Če je $A>0$, je $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ blizu (a,b) in nastopi lokalni minimum.
  - Če je $AC-B^2<0$, je izraz $(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2$ za neničelna h in k zmožen zavzeti pozitivne in negativne vrednosti. Pri $k=0$ je zagotovo pozitiven, če pa pri $k\neq 0$ postavimo $h=-\frac{B}{A}k$, bo $Ah+Bk=0$, in bo izraz negativen. Torej v točki (a,b) ni ekstrema.
  - Če je $AC-B^2=0$, je

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2+\frac{1}{2}\left(\eta h^2+2\eta' hk+\eta'' k^2\right).$$

    Če sta h in k tako izbrana, da je $(Ah+Bk)=0$, je vrednost izraza $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ odvisna od višjih odvodov in v tem primeru s pomočjo drugih odvodov ne moremo odločiti, ali je v točki (a,b) lokalni ekstrem.

- Če je $A=0$, lahko zapišemo

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=(2Bh+Ck)k.$$

  Če je tedaj $B\neq 0$, izraz s h in k spreminja predznak, zato ni ekstrema. (Velja: $AC-B^2<0$.) Če je $B=0$, je pri $k=0$ predznak odvisen od višjih odvodov. Predznak izraza $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ je odvisen od višjih odvodov tudi, če je $A=B=C=0$.

Povzemimo: Naj bo (a,b) stacionarna točka funkcije dveh spremenljivk. Označimo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b). \end{aligned}$$

Izrek 110 *Če je $AC - B^2 > 0$, nastopi v točki (a,b) lokalni ekstrem, in sicer lokalni minimum za $A > 0$ in lokalni maksimum za $A < 0$. Če je $AC - B^2 < 0$, v točki (a,b) ni lokalnega ekstrema. Če je $AC - B^2 = 0$, le s pomočjo drugih odvodov ne moremo odločiti, ali je v točki (a,b) lokalni ekstrem.*

Zapišimo vse druge parcialne odvode in jih zapišimo v *Hessejevo matriko*:

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{bmatrix}.$$

Ker je funkcija f dvakrat zvezno parcialno odvedljiva, je matrika $Hf(a)$ simetrična; torej

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da je determinanta Hessejeve matrike ravno enaka

$$\det(Hf(a)) = AC - B^2.$$

Gornji izrek lahko sedaj povemo na kratko: Če je determinanta Hessejeve matrike pozitivna, nastopi v stacionarni točki ekstrem (lokalni maksimum, če je $A < 0$ in lokalni minimum, če je $A > 0$). Če je determinanta Hessejeve matrike negativna, v stacionarni točki ni ekstrema. Če je determinanta Hessejeve matrike enaka 0, pa s pomočjo drugih odvodov ne moremo ugotoviti, ali nastopi v stacionarni točki ekstrem.

Zgled 287 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$.*

Določimo najprej stacionarne točke. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4$, mora za stacionarno točko veljati $2x - 6 = 0$ in $2y + 4 = 0$. Torej je $x = 3$ in $y = -2$. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$A = Hf(3,-2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je $a_{11} = 2 > 0$ in $\det(A) = 4 > 0$, je v točki $(3,-2)$ lokalni minimum.

Zgled 288 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.*

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, mora za stacionarno točko veljati $3x^2 - 3y = 0$ in $3y^2 - 3x = 0$. Sledi $y = x^2$, kar nam da $x^4 - x = 0$. Torej je $x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

in zato $x = 0$ ali $x = 1$. Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$ in $T_2(1,1)$. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Determinanta Hessejeve matrike je enaka $36xy-9$ in je pozitivna le v točki $T_2(1,1)$. Glede na vrednost elementa $a_{11} = 6$ tako sledi, da je v točki T_2 lokalni minimum. V točki T_1 pa ni ekstrema.

Zgled 289 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$.

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-8x+2y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x-2y$, mora za stacionarno točko veljati $3x^2-8x+2y = 0$ in $2x - 2y = 0$. Torej je $y = x$, kar nam da $3x^2 - 6x = 0$. Sledi $x = 0$ (in $y = 0$) ali $x = 2$ (in $y = 2$). Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$ in $T_2(2,2)$. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta Hessejeve matrike je enaka $-12x + 12$ in je pozitivna le v točki $T_1(0,0)$. Glede na vrednost elementa $a_{11} = -8$ tako sledi, da je v točki T_1 lokalni maksimum, v točki T_2 pa je sedlo.

Zgled 290 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = 3x^2y+6xy^2+4y^3-3y$.

Izračunajmo parcialne odvode. $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 6y^2$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 12xy + 12y^2 - 3$. Iz prve enačbe sledi $6xy + 6y^2 = 0$, kar nam da $y = 0$ ali $x = -y$. Če je $y = 0$, iz druge enačbe sledi $3x^2 - 3 = 0$, kar nam da $x = \pm 1$. Če pa je $x = -y$, iz druge enačbe sledi $3x^2 - 3 = 0$, kar nam da $x = \pm 1$ in $y = \mp 1$. Torej imamo 4 stacionarne točke $T_1(1,0)$, $T_2(-1,0)$, $T_3(1,-1)$ in $T_4(-1,1)$. Zapišimo Hessejevo matriko

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y & 6x+12y \\ 6x+12y & 12x+24y \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa po vrsti izračunamo $Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, $Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$, $Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$, $Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, kar pomeni, da imamo v točki $T_3(1,-1)$ lokalni maksimum, v točki $T_4(-1,1)$ pa lokalni minimum. V točkah T_1 in T_2 ni ekstremov.

Zgled 291 *Določi absolutni minimum in absolutni maksimum funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$.

Določimo najprej stacionarne točke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (6x + (3x^2 + 2y^2)(-2x))e^{-x^2-y^2} = -2x(3x^2 + 2y^2 - 3)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (4y + (3x^2 + 2y^2)(-2y))e^{-x^2-y^2} = -2y(3x^2 + 2y^2 - 2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Najprej opazimo, da ne moreta biti x in y hkrati različna od 0. Pri $x = 0$ je lahko $y = 0$ ali pa $y = \pm 1$. Podobno je za $y = 0$ lahko $x = 0$ ali pa $x = \pm 1$. Torej imamo stacionarne točke $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ in $(-1,0)$. Po vrsti izračunamo $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 2e^{-1} = f(0,-1)$ in $f(1,0) = 3e^{-1} = f(-1,0)$. Ker je očitno $f(x,y) \geq 0$ za vsak (x,y), je v točki $(0,0)$ globalni minimum. V točkah $(1,0)$ in $(-1,0)$ pa zavzame globalni maksimum, saj je za velike (x,y) vrednost funkcije f poljubno majhna. (Uporabimo limito $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$.)

Zgled 292 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$.

Določimo najprej stacionarne točke: $\frac{\partial f}{\partial x} = -(1+e^y)\sin x$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cos x - e^y - ye^y = e^y(\cos x - 1 - y)$. Iz prve enačbe sledi, da je $x = k\pi$, iz druge pa $y = \cos x - 1 = (-1)^k - 1$.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+e^y)\cos x & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y(\cos x - 2 - y) \end{bmatrix}.$$

Ker za $x = k\pi$ velja $\sin x = 0$, je determinanta Hessejeve matrike enaka $-(1+e^y)\cos x \cdot e^y(\cos x - 2 - y) = e^y(1+e^y)(-1)^{k+2}$. Torej je determinanta pozitivna za sode k. V tem primeru je $a_{11} = -(1+e^y)(-1)^k < 0$ in imamo lokalni maksimum. V točkah $(k\pi, y)$ za lihe k pa nimamo ekstremov, ampak sedla.

Opomniti velja, da je tak pojav pri funkcijah ene spremenljivke nemogoče zaslediti. Če je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ povsod odvedljiva in ima v točkah a in b lokalna maksima, mora imeti na odprtem intervalu med a in b vsaj še en lokalni minimum.

Zgled 293 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - 2y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -6(x - 4y^2)$, mora za stacionarno točko veljati $x^2 - 2y = 0$ in $x - 4y^2 = 0$. Sledi $16y^4 - 2y = 0$, kar nam da $8y^4 = y$. Torej je $y(2y-1)(4y^2+2y+1) = 0$ in zato $y = 0$ ali $y = \frac{1}{2}$. Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$ in $T_2(1, \frac{1}{2})$. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{bmatrix}.$$

Determinanta Hessejeve matrike je enaka $36(8xy - 1)$ in je pozitivna le v točki $T_2(1, \frac{1}{2})$. Glede na vrednost elementa $a_{11} = 6$ v tej točki tako sledi, da je v točki $T_2(1, \frac{1}{2})$ lokalni minimum. V točki $T_1(0,0)$ pa ni ekstrema.

Zgled 294 *Določi ekstreme funkcije, podane s predpisom* $f(x,y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.

Najprej zapišemo $f(x,y) = (x^2 + y)e^{y/2}$. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{y/2}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(2 + x^2 + y)e^{y/2}$, mora za stacionarno točko veljati $2xe^{y/2} = 0$ in $\frac{1}{2}(2 + x^2 + y)e^{y/2} = 0$. Torej je $x = 0$, kar nam da $y = -2$. Stacionarna točka je $T(0,-2)$. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{y/2} & xe^{y/2} \\ xe^{y/2} & \frac{1}{4}(4 + x^2 + y)e^{y/2} \end{bmatrix}.$$

Torej je $Hf(0,-2) = \begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}2e^{-1} \end{bmatrix}$. Determinanta Hessejeve matrike je v točki $(0,-2)$ enaka $4e^{-2} > 0$. Glede na vrednost elementa $a_{11} = 2e^{-1}$ tako sledi, da je v točki $T(0,-2)$ lokalni minimum.

9.9 Metoda najmanjših kvadratov

Recimo, da je na podlagi meritev dano n točk (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n). Poiskati želimo premico (tj. funkcijo oblike $y = \alpha x + \beta$, ki se podatkom najbolje prilega, torej tako, da bo vrednost izraza

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha x_i - \beta))^2$$

minimalna. Če označimo

$$\begin{aligned} S_X &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ S_Y &= y_1 + y_2 + \ldots + y_n, \\ S_{XX} &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ S_{YY} &= y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \\ S_{XY} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \end{aligned}$$

lahko izračunamo

$$\alpha = \frac{nS_{XY} - S_X S_Y}{nS_{XX} - S_X S_X}$$

in

$$\beta = \frac{S_Y - \alpha S_X}{n}.$$

Zgled 295 *Poišči linearno funkcijo, ki se najbolje prilega točkam* $T_1(0,0)$, $T_2(1,2)$ *in* $T_3(3,4)$.

Po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned} S_X &= 4, \\ S_Y &= 6, \\ S_{XX} &= 10, \\ S_{YY} &= 20, \\ S_{XY} &= 14, \end{aligned}$$

in

$$\alpha = \frac{nS_{XY} - S_X S_Y}{nS_{XX} - S_X S_X} = \frac{3 \cdot 14 - 4 \cdot 6}{3 \cdot 10 - 4^2} = \frac{9}{7}$$

in

$$\beta = \frac{S_Y - \alpha S_X}{n} = \frac{6 - \frac{9}{7} \cdot 4}{3} = \frac{2}{7}.$$

Iskana funkcija je $y = \frac{9}{7}x - \frac{2}{7}$.

9.10 Vezani ekstremi

Naj bo D **odprta** množica v $\mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Naj bo $M \subset D$ poljubna podmnožica. Zanima nas ekstrem funkcije $f|_M\colon M \to \mathbb{R}$.

Pogosto je množica M podana z *vezmi*; torej v obliki:

$$M = \{x \in D;\ g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\},$$

kjer so $g_1, \ldots, g_m\colon D \to \mathbb{R}$ dane odvedljive funkcije.

Primer: Zamima nas, katera točka na elipsi z enačbo $x^2 + 4y^2 = 1$ leži najbližje koordinatnemu izhodišču. Vez je ena sama: $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$, funkcija, katere ekstrem iščemo, pa je $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Metoda Lagrangeovih multiplikatorjev Ker za spremenljivke $x_1, \ldots, x_n$ velja

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

te spremenljivke niso neodvisne. Ob primernih pogojih bi lahko iz tega sistema izrazili m spremenljivk kot funkcije preostalih $n - m$ spremenljivk in jih vstavili v $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Vendar pa kljub temu velja, da je v stacionarni točki totalni diferencial enak 0. Torej je

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \tag{46}$$

Ker spremenljivke $x_1, \ldots, x_n$ niso neodvisne, tudi diferenciali niso neodvisni. Če diferenciramo vse vezi, dobimo

$$\begin{aligned} dg_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}dx_n = 0, \\ dg_2 &= \frac{\partial g_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n}dx_n = 0, \\ &\vdots \\ dg_m &= \frac{\partial g_m}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g_m}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}dx_n = 0. \end{aligned}$$

Pomnožimo gornje enačbe zaporedoma z $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in jih prištejmo enačbi (46). Dobimo

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\right)dx_1 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_2}\right)dx_2 + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\right)dx_n. \end{aligned}$$

Najprej določimo konstante $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tako, da so v tej enačbi koeficienti pri zadnjih m ebačbah enaki 0. Ker so diferenciali $dx_1, \ldots, dx_{n-m}$ med seboj neodvisni, so tudi pri teh diferencialih koeficienti enaki 0. Torej dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_2} &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} &= 0.
\end{aligned}$$

Konstante $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in spremenljivke $x_1, \ldots, x_n$ določimo sedaj tako, da ustrezajo vezem in gornjemu sistemu enačb.

Pri iskanju vezanih ekstremov si pomagamo z *Lagrangeovo funkcijo*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x) - \ldots - \lambda_m g_m(x).$$

Števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ imenujemo *Lagrangeovi multiplikatorji.*

Izrek 111 *Če ima funkcija $f|_M$ lokalni ekstrem v točki $a \in M$, obstajajo realna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, da je $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ in $g_j(a) = 0$ za $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Kot pri običajnih ekstremih smo s tako formuliranim izrekom zapisali le **potreben** pogoj za nastop ekstrema, ne pa tudi zadostnega. Enostavne metode za iskanje zadostnih pogojev ni, lahko pa si pomagamo z naslednjim izrekom.

Izrek 112 *Če funkcije f, g_1, $\ldots$, g_m zadoščajo pogojem prejšnjega izreka in poleg tega velja, da je kvadratna forma $\langle Hf(a)t, t\rangle$ pozitivno definitna za vse vektorje $t = (t_1, \ldots, t_n)$, za katere je $\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t_i) = 0$, ima funkcija $f|_M$ v točki a lokalni ekstrem.*

Zgled 296 *Poišči vse ekstreme funkcije f, podane s predpisom $f(x, y) = 2x - 4y$, na krožnici, podani z enačbo $x^2 + y^2 = 1$.*

Zapišimo Lagrangeovo funkcijo $F(x, y, \lambda) = 2x - 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Potem mora v stacionarni točki veljati $\frac{\partial F}{\partial x} = 2 - 2x\lambda = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -4 - 2y\lambda = 0$ in $x^2 + y^2 = 1$. Iz prve enačbe izrazimo $x = \frac{1}{\lambda}$, iz druge pa $y = -\frac{2}{\lambda}$. Torej je $x^2 + y^2 = \frac{5}{\lambda^2} = 1$, kar nam da $\lambda = \pm\sqrt{5}$. Stacionarni točki sta $T_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ in $T_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. V točki T_1 je lokalni maksimum, v T_2 pa lokalni minimum.

Zgled 297 *Poišči vse ekstreme funkcije f, podane s predpisom $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$, na krivulji, podani z enačbo $x^3 + y^3 = 1$.*

Zapišimo Lagrangeovo funkcijo $F(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - \lambda(x^3 + y^3 - 1)$. Potem mora v stacionarni točki veljati $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x - 2y - 3x^2\lambda = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 6y - 3y^2\lambda = 0$ in $x^3 + y^3 = 1$. Najprej opazimo, da v $x = 0$ v prvi enačbi implicira $y = 0$, kar pa zaradi

vezi ni možno. Podobno tudi $y = 0$ v drugi enačbi implicira $x = 0$, kar spet zaradi vezi ni možno. Iz prve enačbe izrazimo $\lambda = \frac{6x-2y}{3x^2}$, iz druge pa $\lambda = \frac{-2x+6y}{3y^2}$. Torej je

$$\frac{6x-2y}{3x^2} = \frac{-2x+6y}{3y^2},$$

kar lahko preoblikujemo v $6xy(y-x)+2(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$ oz. $2(x-y)^3 = 0$. Sledi $x = y$, kar nam zaradi vezi da $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Analizirajmo vez. Iz $x^3 + y^3 = 1$ lahko izrazimo $y = \sqrt[3]{1-x^3} = x\sqrt[3]{(}-1+\frac{1}{x^3})$, kar je za velike x približno enako $-x$. Torej za velike x velja $f(x,y) \approx 3x^2 + 2xx + 3x^2 = 8x^2$ in je funkcija f navzgor neomejena. V točki $T(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ je lokalni minimum.

Zgled 298 *Poišči vse ekstreme funkcije f, podane s predpisom $f(x,y) = 2x^3+4x^2+y^2-2xy$, na območju, omejenem z grafoma funkcij $y = x^2$ in $y = 4$.*

Poiščimo najprej ekstreme v notranjosti tega območja. Ker je $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 8x - 2y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x$, iz pogojev $6x^2 + 8x - 2y = 0$ in $2y - 2x = 0$ izpeljemo $x = y$, kar nam da $6x^2 + 6x = 0$ oz. $x = 0$ ali $x = -1$. Torej sta $T_1(0,0)$ in $T_2(-1,-1)$ stacionarni točki. Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x+8 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta Hessejeve matrike je enaka $24x + 12$ in je pozitivna le v točki $(0,0)$. Glede na vrednost elementa $a_{11} = 8$ tako sledi, da je v točki $T_1(0,0)$ lokalni minimum.

Poiščimo sedaj ekstreme na robu območja. Če je $y = 4$, je $g(x) = f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x$ pravzaprav funkcija ene spremenljivke. Ker je $g'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 2(3x-2)(x+2)$, sta lokalna ekstrema pri $x = \frac{2}{3}$ in $x = -2$. Torej sta ekstrema funkcije f še v točkah $(\frac{2}{3}, 4)$ in $(-2, 4)$.

Če pa je $y = x^2$, si pomagamo z vezanimi ekstremi. Lagrangeova funkcija je tedaj enaka

$$F(x,y,\lambda) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy - \lambda(y - x^2).$$

Torej je $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 + 8x - 2y + 2\lambda x$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - \lambda$. Ko v prvi enačbi upoštevamo $y = x^2$, dobimo $6x^2 + 8x - 2x^2 + 2\lambda x = 2x(2x + 4 + \lambda)$. Če je $x = 0$, je tudi $y = \lambda = 0$. Sicer pa je $2x + 4 + \lambda = 0$, $2y - 2x - \lambda = 0$ in $y = x^2$. Sledi $2y + 4 = 0$, kar zaradi $y = x^2$ ni možno. Torej je na vezi $y = x^2$ stacionarna točka le $(0,0)$ in v tej točki je lokalni minimum.

Zgled 299 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije f, $f(x,y) = x^3+y^3-9xy+2$, na omočju $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$.*

Kot običajno najprej določimo stacionarne točke. Parcialna odvoda sta $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x$. Torej je $3y = x^2$ in $3x = y^2$. Sledi $x = y = 0$ ali $x = y = 3$.

Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}.$$

Ker je determinanta Hessejeve matrike enaka $36xy - 81$, je v točki $(3,3)$ lokalni ekstrem (minimum), v točki $(0,0)$ pa ni ekstrema.

Za $x = 0$ imamo na robu funkcijo ene spremenljivke $g(y) = y^3 + 2$, ki ima v $y = 0$ minimum, v $y = 4$ pa maksimum. (Ustrezni točki sta $(0,0)$ in $(0,4)$.) Pri $x = 4$ imamo na robu funkcijo ene spremenljivke $g(y) = 64 + y^3 - 36y + 2$. Iz $g'(y) = 3y^2 - 36 = 0$ sledi, da imamo v $y = 2\sqrt{3}$ lokalni ekstrem (minimum). (Ustrezna točka je $(4, 2\sqrt{3})$. Podobno z analizo funkcij $x \mapsto f(x,0)$ in $x \mapsto f(x,4)$ poiščemo še točke $(0,0)$, $(4,0)$, $(2\sqrt{3},4)$. Nazadnje analiziramo še oglišča.

Da bi torej poiskali največjo in najmanjšno vrednost funkcije f na danem območju, je potrebno izračunati in primerjati funkcijske vrednosti v točkah

$$(0,0),\ (0,4),\ (4,4),\ (4,0),\ (2\sqrt{3},4),\ (4,2\sqrt{3}),\ (3,3).$$

Zgled 300 *V polkrog polmera r včrtraj pravokotnik z največjo ploščino, katerega stranice so vzporedne koordinatnima osema.*

Recimo, da leži njegovo oglišče (x,y) na delu loka v prvem kvadrantu. Potem ima pravokotnik oglišča v točkah $(x,0)$, (x,y), $(-x,0)$, $(-x,y)$, njegova ploščina pa je enaka $2xy$. Ker leži točka na krožnici, velja $x^2 + y^2 = r^2$. Torej iščemo maksimum funkcije $f(x,y) = 2xy$ pri pogoju $x^2 + y^2 = r^2$. Zapišimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Potem je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y - 2\lambda x$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 2\lambda y$. Ker iz $x = 0$ sledi $y = 0$ (oz. iz $y = 0$ sledi $x = 0$), je $x \neq 0 \neq y$. Torej je $\frac{y}{x} = \lambda = \frac{x}{y}$ in $x^2 = y^2$. Skupaj z $x^2 + y^2 = r^2$ to pomeni $x = \frac{1}{\sqrt{2}}r$ in $y = \frac{1}{\sqrt{2}}r$. (Predpostavili smo namreč, da točka (x,y) leži v prvem kvadrantu.) Največja ploščina je tako enaka $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}r = r^2$.

Zgled 301 *Poišči najmanjšo razdaljo od koordinatnega izhodišča do grafa funkcije $y = x^2 - x - 1$.*

Razdalja od točke (x,y) do koordinatnega izhodišča je enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$. Torej iščemo ekstreme funkcije $\sqrt{x^2 + y^2}$ pri pogoju $y = x^2 - x - 1$. Opaziti velja, da je zaradi monotonosti korenske funkcije dovolj poiskatni minimum funkcije $x^2 + y^2$ pri istem pogoju.

Zapišimo Lagrangeovo funkcijo $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - x - 1 - y)$. Potem je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - (2x-1)\lambda$ in $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda$. Sledi $\lambda = \frac{2x}{2x-1} = -2y$ in $y = \frac{x}{1-2x}$. Torej je $\frac{x}{1-2x} = x^2 - x - 1$, kar nam da $-2x^3 + 3x^2 - 1 = (x-1)^2(-2x-1) = 0$. Torej je $x = 1$ ali $x = -\frac{1}{2}$. Pri $x = 1$ je $y = 1$ in razdalja $d = \sqrt{2}$. Pri $x = -\frac{1}{2}$ je $y = -\frac{1}{4}$ in razdalja je $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Zgled 302 *V polsfero polmera r včrtraj kvader največje prostornine.*

Recimo, da ima kvader eno oglišče v točki (x,y,z)

Zgled 303 *Izmed vseh trikotnikov z danim obsegom poišči tistega za največjo ploščino.*

Zgled 304 *Izmed vseh trikotnikov, ki so včrtani danemu krogu, obsegom poišči tistega z največjo ploščino.*

Zgled 305 *Poišči vse ekstreme funkcije f, podane s predpisom $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x}$.*

Parcialna odvoda sta $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+x+y^2-3y}{x^2+y^2}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^2+3x-2y^2+y}{x^2+y^2}$. Torej je $x^2+x+y^2-3y=0$ in $-2x^2+3x-2y^2+y=0$. Iz prve enačbe sledi $x^2+y^2 = -x+3y$, iz druge pa $x^2+y^2 = \frac{1}{2}(3x+y)$. Torej je $-x+3y = \frac{1}{2}(3x+y)$, kar nam da $-2x+6y = 3x+y$ oz. $x=y$. Enačbo $x^2+x+y^2-3y=0$ tako preoblikujemo v $2x^2-2x=0$, kar nam da $x=0$ ali $x=1$. Ker točka $(0,0)$ ni v definicijskem območju funkcije f, je stacionarna točka ena sama: $T(1,1)$.

Zapišimo Hessejevo matriko:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x^2+6yx+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-3x^2-2yx+3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-3x^2-2yx+3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-6yx-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-2}{4} & \frac{-6}{4} \end{bmatrix}.$$

Ker je determinanta Hessejeve matrike v točki $(1,1)$ negativna, v tej točki ni ekstrema.

Zgled 306 *Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xy^2$ na polkrogu, podanem z enačbama $x^2+y^2 \le 3$, $x \le y$.*

10 Diferencialne enačbe

10.1 Splošen pojem diferencialne enačbe

Naj bo $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ odprta množica in $F\colon D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Navadna *diferencialna enačba* je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y in njenimi odvodi y', $\ldots$, $y^{(n)}$, torej zveza

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{47}$$

Zgled 307 *Za funkcijo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, podano s predpisom $F(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_1x_2 - \sin x_1$, je pripadajoča enačba enaka $y' + xy - \sin x = 0$.*

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda v enačbi.

Zgled 308 *Diferencialna načba $y' = 2xy + x^2$ ima red 1, enačba $y'' + 3y' - 7 = \cos x e^{-x}$ pa red 2.*

Rešitev diferencialne enačbe (47) reda n na intervalu (a,b) je vsaka funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, ki je na tem intervalu n-krat odvedljiva in za vsak $x \in (a,b)$ zadošča enačbi.

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \tag{48}$$

Rešiti diferencialno enačbo pomeni poiskati vse funkcije, ki tej enačbi zadoščajo. Običajno je, da ima diferencialna enačba reda n več rešitev, ki so odvisne od n parametrov. Taki rešitve pravimo *splošna rešitev*. Če v splošni rešitvi izberemo parametre, dobimo natanko eno določeno rešitev iz te družine, ki ji pravimo *partikularna rešitev*. Precej pogosto določimo partikularno rešitev tako, da predpišemo začetne vrednosti

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Možno je, da premore diferencialna enačba tudi rešitve, ki jih ne moremo dobiti s primerno izbiro parametrov v splošni rešitvi. Takim rešitvam pravimo *singularne rešitve*.

Zgled 309 *Funkcija $y(x) = \sqrt{1+x^2}$ je rešitev diferencialne enačbe $yy' = x$ na celi realni osi.*

Ker je $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{y}$, res lahko zapišemo $yy' = x$.

Zgled 310 *Funkcija $y(x) = \sin(2x)$ je rešitev diferencialne enačbe $y' + 4y = 0$ na celi realni osi.*

Ker je $y' = 2\cos(2x)$ in $y'' = -4\sin(2x)$, res velja $y'' + 4y = 0$ na celi realni osi. ■

To pa ni edina rešitev. Gornji enačbi ustrezajo vse funkcije oblike $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ (splošna rešitev), kjer sta $A, B \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Res: Za $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ velja $y' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$ in $y'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$.

Partikularno rešitev, ki npr. ustreza pogoju $y(0) = y'(0) = 1$, dobimo tako, da rešimo sistem enačb $y(0) = 1$ in $y'(0) = 1$. Torej $y(0) = A\sin(2x) + B\cos(2x)|_{x=0} = B = 1$ $y'(0) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)|_{x=0} = 2A = 1$. Torej je iskana funkcija enaka

$$y = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(2x).$$

Diferencialne enačbe zelo pogosto srečamo v tehniki in naravoslovju. Poleg običajnih diferencialnih enačb so pogosti tudi sistemi diferencialnih enačb, pri katerih v enačbah nastopajo odvodi več neznanih funkcij.

Zgled 311 (Radioaktivni razpad) *Na začetku imamo m_0 radioaktivnega izotopa ${}_{88}Ra^{226}$. Zapiši, kako se masa iztopa spreminja v odvisnosti od časa.*

Zakon o radioaktovnem razpadu pravi, da je hitrost razpadanja sorazmerna količini snovi. Torej $\frac{dm}{dt} = Km$, kjer je $K < 0$ konstanta, značilna za določen radioaktovni izotop. Za ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$ je $K = -1.4 \cdot 10^{-11}\mathrm{s}^{-1}$. Diferencialne enačbe $\frac{dm}{dt} = Km$ še ne znamo sistematično obravnavati, enoparametrično družino rešitev $m(t) = Ce^{Kt}$ pa lahko kljub temu uganemo. Ker na začetku (tj. pri $t = 0$) velja $m(0) = m_0$, sledi $Ce^{Kt}|_{t=0} = m_0$, kar nam da $C = m_0$. Torej je

$$m(t) = m_0 e^{Kt}.$$

Zgled 312 *Poišči vse funkcije, ki zadoščajo enačbi $y' = 0$.*

Videli smo že, da le konstantne funkcije zadoščajo gornjemu pogoju. Torej je za vsak $c \in \mathbb{R}$ funkcija $y = f(x) = c$ rešitev gornje enačbe. ■

Podobno je možno videti, da so za dani $n \in \mathbb{N}$ vse funkcije, ki zadoščajo enačbi $y^{(n)} = 0$ ravno polinomi stopnje $n-1$; torej $y(x) = x^{n-1}a_{n-1} + x^{n-2}a_{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Geometrijska interpretacija diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ je naslednja. V vsaki točki $(x, y) \in D$ določa enačba smerni koeficient tangente na graf funkcije, ki jo reši. Tako lahko v vsaki točki $(x, y) \in D$ pripnemo vektor $\vec{v} = (1, f(x, y))$.

10.2 Diferencialne enačbe prvega reda

Splošno diferencialno enačbo prvega reda podamo v obliki

$$F(x, y, y') = 0.$$

Njena rešitev je enoparametrična družina krivulj $y = f(x, C)$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ parameter. Partikularno rešitev dobimo tako, da predpišemo pogoj, ki mu mora ta rešitev zadoščati. Običajno podamo vrednost v neki točki, torej $y(x_0) = y_0$.

Diferencialni enačbi skupaj z začenim pogojem

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \tag{49}$$

pravimo *začetni problem*.

Enačba z ločljivima spremenljivkama Če lahko enačbo $F(x, y, y') = 0$ zapišemo v obliki $y' = h(x)g(y)$, pravimo, da ima enačba *ločljivi spremenljivki*. Ker je $y' = \frac{dy}{dx}$, lahko zapišemo $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$, kar nam da

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx.$$

Torej je splošna rešitev enaka

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\, dx + C,$$

ki jo lahko zapišemo v obliki $G(y) = H(x) + C$. Za partikularno rešitev, ki npr. ustreza pogoju $y(x_0) = y_0$, pa velja $G(y_0) = H(x_0) + C$. Torej je

$$C = G(y_0) - H(x_0).$$

Zgled 313 *Poišči splošno rešitev enačbe* $xy + (x+1)y' = 0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(0) = 1$.

To je enačba z ločljivima spremenljivkama $\frac{x}{x+1}\, dx = -\frac{1}{y}\, dy$. Sledi $\int \frac{x}{x+1}\, dx = -\int \frac{1}{y}\, dy$, kar nam da $x - \ln(x+1) = -\ln y + c$ oz. $y = C(x+1)e^{-x}$. Ker je $y(0) = 1$, sledi $C = 1$ in zato $y = (x+1)e^{-x}$.

Zgled 314 *Poišči splošno rešitev enačbe* $\sqrt{y^2+1} = xyy'$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(1) = 1$.

To je enačba z ločljivima spremenljivkama $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\, dy = \frac{1}{x}\, dx$, kar nam da $\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$. Torej je $\sqrt{y^2+1} = \ln x + C$ in $y^2 = (\ln x + C)^2 - 1$.

Če je torej $y(1) = -1$, velja $C^2 - 1 = 1$ in $C = \pm\sqrt{2}$. Iskani funkciji sta dve $y = \sqrt{(\ln x \pm \sqrt{2})^2 - 1}$.

Zgled 315 *Poišči splošno rešitev enačbe* $2x^2yy' + y^2 = 2$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(1) = -1$.

To je enačba z ločljivima spremenljivkama $\frac{y}{2-y^2}\,dy = \frac{1}{2x^2}\,dx$. Sledi $-\frac{1}{2}\ln(2-y^2) = -\frac{1}{2x}+C$, kar nam da

$$y^2 = 2 - e^{\frac{1}{x}-2C}.$$

Ker mora biti $y(1) = -1$, sledi $1 = 2 - e^{1-2C}$ in zato $1 - 2C = 0$. Torej je $C = \frac{1}{2}$. Iskana funkcija je

$$y = -\sqrt{2 - e^{\frac{1}{x}-1}}.$$

Zgled 316 *Poišči splošno rešitev enačbe* $(1 + x^2)y' + (1 + y^2) = 0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(1) = 1$.

To je enačba z ločljivima spremenljivkama $\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{1+y^2}dy$. Sledi $\arctan x = -\arctan y + C$ in

$$y = \tan(C - \arctan x) = \frac{c - x}{1 + cx},$$

kjer smo označili $c = \tan C$. Če sedaj zapišemo $y(1) = 1$, dobimo $1 = \tan(C - \frac{\pi}{4})$. Sledi $C = \frac{\pi}{2}$. To pa med drugim pomeni, da ne smemo rešitve zapisati v obliki $y = \frac{c-x}{1+cx}$, kjer je označili $c = \tan C$. Iskana rešitev je potem kar $y = \tan(C - \arctan x) = -\cot(\arctan x) = -\frac{1}{x}$.

Zgled 317 *Poišči splošno rešitev enačbe* $e^{x+2y} - e^{2x-y}y' = 0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(0) = 0$.

Ker je $e^x e^{2y} = e^{2x}e^{-y}y'$, je to enačba z ločljivima spremenljivkama $e^{-x}\,dx = e^{-3y}\,dy$. Sledi $-e^{-x} = -\frac{1}{3}e^{-3y} + C$, kar nam da

$$y = -\frac{1}{3}\ln(3(C + e^{-x})).$$

Z upoštevanjem pogoja $y(0) = 1$ pa dobimo $-1 = -\frac{1}{3} + C$ in od tod $C = -\frac{2}{3}$.

Zgled 318 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y' \cos x - y = 0$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(0) = 1$.

To je enačba z ločljivima spremenljivkama $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos x}$. Sledi $\ln y = \int \frac{1}{\cos x}\,dx$. Integral $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ najlažje izračunamo s pomočjo nove spremenljivke $t = \tan\frac{x}{2}$. Dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \\ &= \int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t} = \ln\frac{1+t}{1-t} = \ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Sledi $\ln y = \ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}} + C$, kar nam da $y = c\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$, kjer smo zapisali $c = e^C$.

Ker mora veljati $y(0) = 1$, od tod sledi $c = 1$ in

$$y = \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}}.$$

Linearna diferencialna enačba I. reda Enačbo oblike

$$y' + f(x)y = g(x)$$

imenujemo *Linearna diferencialna enačba I. reda.* Če je $g(x) = 0$, ima enačba

$$y' + f(x)y = 0$$

ločljivi spremenljivki in njena rešitev je $\ln y + \int f(x)\,dx = \ln C$ oziroma

$$y = Ce^{-\int f(x)\,dx}.$$

Gornjo enačbo sedaj rešujemo s pomočjo *variacije konstante.* Konstanto C nadomestimo z neznano funkcijo $C = u(x)$. Sledi $y = u(x)y_h(x)$, kjer smo zapisali $y_h(x) = e^{-\int f(x)\,dx}$. Ko slednje vstavimo v gornjo enačbo, dobimo

$$u'(x)y_h(x) + u(x)y_h'(x) + f(x)u(x)y_h(x) = g(x).$$

Ker je $u(x)y_h'(x) + f(x)u(x)y_h(x) = u(x)(y_h'(x) + f(x)y_h(x)) = 0$, sledi

$$u'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)}$$

in $u(x) = \int \frac{g(x)}{y_h(x)}\,dx + C$. Torej je splošna rešitev enaka $y = y_h(x)(\int \frac{g(x)}{y_h(x)}\,dx + C)$, kar pogosto zapišemo v obliki

$$y(x) = y_p(x) + Cy_h(x),$$

kjer je $y_h(x) = e^{-\int f(x)\,dx}$ splošna rešitev homogene enačbe, $y_p(x) = e^{-\int f(x)\,dx} \int \frac{g(x)}{y_h(x)}\,dx$ pa partikularna rešitev nehomogene enačbe.

Zgled 319 *Poišči splošno rešitev enačbe $y' + 2y = e^{2x}$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.*

Pridružena homogena enačba se glasi $y' + 2y = 0$. Torej je $\frac{dy}{dx} = -2y$, kar nam da $\frac{dy}{y} = -2\,dx$. Torej je $\ln y = -2x + \ln C$ oziroma

$$y_h = Ce^{-2x}.$$

Rešitev nehomogene enačbe določimo s pomočjo variacije konstante $y = u(x)e^{-2x}$. Sledi $y' = u'(x)e^{-2x} - 2u(x)e^{-2x}$ in $u'(x)e^{-2x} - 2u(x)e^{-2x} + 2u(x)e^{-2x} = e^{2x}$. Torej je $u'(x)e^{-2x} = e^{2x}$ in $u = \frac{1}{4}e^{4x}$. Sledi $y_p = \frac{1}{4}e^{4x}e^{-2x} = \frac{1}{4}e^{2x}$. Splošno rešitev diferencialne enačbe zapišemo kot $y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$.

Za partikularno rešitev velja $y(0) = C + \frac{1}{4} = 1$, torej je $C = \frac{3}{4}$ in $y = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$.

Zgled 320 *Poišči splošno rešitev enačbe $xy' - 2y = 2x^4$ in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = 1$.*

Pridružena homogena enačba se glasi $xy' - 2y = 0$. Torej je $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$, kar nam da $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$. Torej je $\ln y = 2\ln x + \ln C$ oziroma

$$y_h = Cx^2.$$

Rešitev nehomogene enačbe določimo s pomočjo variacije konstante $y = u(x)x^2$. Sledi $y' = u'(x)x^2 - 2xu(x)$ in $xu'(x)x^2 - 2x^2u(x) + 2u(x)x^2 = 2x^4$. Torej je $u'(x)x^3 = 2x^4$ in $u = x^2$. Sledi $y_p = x^2x^2 = x^4$. Splošno rešitev diferencialne enačbe zapišemo kot $y = y_h + y_p = Cx^2 + x^4$.

Za partikularno rešitev velja $y(1) = C + 1 = 1$, torej je $C = 0$ in $y = x^4$.

Zgled 321 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$ *in zapiši partikularno rešitev, ki zadošča pogoju* $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Pridružena homogena enačba se glasi $y' + y\tan x = 0$. Torej je $\frac{dy}{dx} = -y\tan x$, kar nam da $\frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$. Torej je $\ln y = \ln\cos x + \ln C$ oziroma

$$y_h = C\cos x.$$

Rešitev nehomogene enačbe določimo s pomočjo variacije konstante $y = u(x)\cos x$. Sledi $y' = u'(x)\cos x - u(x)\sin x$ in $u'(x)\cos x - u(x)\sin x + u(x)\cos x\tan x = \frac{1}{\cos x}$. Torej je $u'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$ in $u = \tan x$. Sledi $y_p = \cos x\tan x = \sin x$. Splošno rešitev diferencialne enačbe zapišemo kot $y = y_h + y_p = \sin x + C\cos x$.

Za partikularno rešitev velja $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + C\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, torej je $C = -1$ in $y = \sin x - \cos x$.

Bernoullijeva enačba Naj bo $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$ realno število, f in g pa zvezni funkciji. Diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \tag{50}$$

se imenuje Bernoullijeva diferencialna enačba. Enačbo lahko s substitucijo $z = y^{-\alpha+1}$ prevedemo na linearno diferencialno enačbo. Res: Ko enačbo (50) delimo z y^{α}, dobimo

$$y^{-\alpha}y' + f(x)y^{-\alpha+1} = g(x).$$

Ker je $z' = (-\alpha+1)y^{-\alpha}y'$, tako sledi

$$\frac{1}{-\alpha+1}z' + f(x)z = g(x)$$

in

$$z' + (-\alpha+1)f(x)z = (-\alpha+1)g(x).$$

Dobljena enačba je običajna linearna diferencialna enačba 1. reda.

Zgled 322 *Reši enačbo* $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Ker je $\alpha = 3$, je primerna substitucija $z = y^{-2}$. Nova enačba se glasi $z' - 4xz = -4x^3$. Pridružena homogena enačba je $z' - 4xz = 0$, ki jo lahko zapišemo kot $\frac{dz}{z} = 4x\,dx$. Torej je $\ln z = 2x^2 + \ln C$ in $z = ce^{2x^2}$. Sedaj pišemo $z = u(x)e^{2x^2}$ in izračunamo $u'e^{2x^2} + ue^{2x^2}(4x) - 4xue^{2x^2} = -4x^3$. Sledi $u' = -4x^3e^{-2x^2}$.

Integral $u(x) = \int -4x^3e^{-2x^2}\,dx$ najlažje izračunamo s pomočjo substitucije $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$. Sledi

$$\begin{aligned} u(x) = \int -4x^3e^{-2x^2}\,dx &= -2\int te^{-2t}\,dt = te^{-2t} - \int e^{-2t}\,dt \\ &= te^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} = x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2}, \end{aligned}$$

kjer smo v izračunu uporabili metodo integracije po delih. Splošna rešitev se tako glasi

$$z = Ce^{2x^2} + e^{2x^2}(x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2}) = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Nazadnje zapišemo $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$, kar nam da dve rešitvi

$$y = \pm\frac{1}{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Zgled 323 *Reši enačbo* $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Pri tej enačbi imamo $\alpha = \frac{1}{2}$. Torej je $z = \sqrt{y}$ primerna zamenjava. Sledi $y = z^2$ in enačba postane Enačba postane $x2zz' - 4z^2 = x^2 z$ oziroma

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Homogeno enačbo $z' - \frac{2}{x}z = 0$ preoblikujemo v $\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}$. Torej je $\ln z = 2\ln x + \ln c$ in $z = cx^2$. Ko pišemo $z = u(x)x^2$, dobimo enačbo $u'x^2 + 2xu - \frac{2}{x}ux^2 = \frac{x}{2}$, ki jo preoblikujemo v $u' = \frac{1}{2x}$. Torej $u = \frac{1}{2}\ln x$ in $z = cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln x$. Rešitev gornje enačbe je tako

$$y = \left(cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln x\right)^2.$$

Zgled 324 *Reši enačbo* $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$.

Ker je $\alpha = 2$, je primerna substitucija $z = y^{-1}$. Torej je $z' - \frac{1}{x+1}z = 1$. Pridružena homogena enačba je $z' - \frac{1}{x+1}z = 0$ in ima splošno rešitev $z = c(x+1)$. Partikularno rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante: $c'(x+1) + c - c = 1$. Sledi $c' = \frac{1}{x+1}$, kar nam da $c = \ln(x+1)$. Torej je $z = c(x+1) + (x+1)\ln(x+1) = (x+1)(c + \ln(x+1))$ in od tod $y = \frac{1}{(1+x)(c+\ln(1+x))}$.

10.3 Diferencialne enačbe višjih redov

Diferencialna enačba drugega reda ima obliko

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{51}$$

njena splošna rešitev pa je dvoparamatrična družina funkcij

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

Da bi lahko določili njeno partikularno rešitev, potrebujemo dva začetna pogoja. Najpogosteje predpišemo

$$y_0 = y(x_0) \quad \text{in} \quad z_0 = y'(x_0). \tag{52}$$

Enačbo (51) skupaj s pogojema (52) imenujemo *začetni problem*. Če namesto pogojev (52) predpišemo vrednosti funkcije y v dveh točkah, tj.

$$y_0 = y(x_0) \quad \text{in} \quad y_1 = y(x_1), \tag{53}$$

imenujemo enačbo (51) skupaj s pogojema (53) *robni problem*.

Reševanje diferencialnih enačb drugega in višjih redov je v splošnem težko. V nadaljevanju si bomo pogledali skupino diferencilnih enačb drugega reda, katere rešitev ni težko izračunati.

Linearne diferencialne enačbe višjega reda Splošna *linearna diferencialna enačba drugega reda* je oblike

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \tag{54}$$

kjer so f, g in r poljubne (zvezne) funkcije neodvisne spremenljivke x.

Splošna *linearna diferencialna enačba reda n* je oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = r(x), \tag{55}$$

kjer so $a_0, \ldots, a_{n-1}$, in r poljubne (zvezne) funkcije neodvisne spremenljivke x.

Če je funkcija r na desni strani enačb (54) oz. (55) identično enaka 0, imenujemo tako enačno *homogena diferencialna enačba*.

Zgled 325 *Diferencialna enačba* $y'' + xy' + \sin xy = x^2e^{-x}$ *je nehomogena, enačba* $y''' - x^2y' + \sqrt{x}y = 0$ *pa homogena.*

Homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda *Homogena linearna diferencialna enačba drugega reda* je oblike

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \tag{56}$$

Take enačbe zelo pogosto nastopajo v fiziki, npr. enačba nihanja uteži z maso m na vzmeti s koeficientom k je $y'' + \frac{k}{m}y = 0$, kjer je $y = y(t)$.

Izrek 113 (Obstoj in enoličnost rešitve) *Če sta* f, g *zvezni funkciji na odprtem intervalu* I *in* $x_0 \in I$, *je začetni problem*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

enolično rešljiv.

Hitro vidimo, da je za poljubni dve funkciji y_1 in y_2, ki sta rešitvi enačbe (56), tudi funkcija $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, rešitev enačbe (56). Podobna trditev za nehomogene enačbe ne velja.

Pravimo, da sta funkciji y_1 in y_2 *linearno odvisni*, če obstajata konstanti C_1, C_2, ne obe 0, da je $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$ za vsak $x \in I$. Če funkciji nista linearno odvisni, sta *linearno neodvisni*.

Naj bosta funkciji y_1 in y_2 rešitvi enačbe (56). Izraz

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

imenujemo *determinanta Wronskega*.

Izrek 114 *Naj bosta funkciji* y_1 *in* y_2 *rešitvi enačbe (56). Funkciji* y_1 *in* y_2 *sta linearno neodvisni natanko tedaj, ko je* $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ *za vsak* $x \in I$. *Če je* $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ *za kakšen* $x \in I$, *je* $W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ *za vsak* $x \in I$ *in funkciji* y_1 *in* y_2 *sta linearno neodvisni.*

Izrek 115 *Splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda (56) je oblike*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kjer sta C_1, C_2 poljubni konstanti, y_1 in y_2 pa linearno neodvisni partikularni rešitvi enačbe (56). Za vsako rešitev $z = z(x)$ enačbe (56) pa obstajata konstanti C_1 in C_2, da je $z(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Gornji izrek nam torej pove, da lahko zapišemo vse rešitve homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda, če le poznamo dve linearno neodvisni rešitvi. V nadaljevanju si bomo pogledali, kako ju lahko poiščemo, če ima enačba konstantne koeficiente.

Enačbe s konstantnimi koeficienti Če sta funkciji f in g v enačbi (56) konstanti, je enačba oblike

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{57}$$

kjer sta $p, q \in \mathbb{R}$. Rešitev enačbe (57) poiščemo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$. Torej je $y' = \lambda e^{\lambda x}$ in $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Ko slednje vstavimo v (57), dobimo

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Torej mora biti $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Polinom

$$k(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q \tag{58}$$

se imenuje *karakteristični polinom* diferencialne enačbe (57). Iz splošne teorije vemo, da ima lahko polinom k ali dve realni različni ničli ali eno dvojno realno ničo ali dve različni konjugirano kompleksni ničli:

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

- Če sta rešitvi realni in različni, je splošna rešitev enačbe (57) enaka $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
- Če sta rešitvi realni in enaki (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$), je splošna rešitev enačbe (57) enaka $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + x C_2 e^{\lambda_1 x}$.
- Če sta rešitvi konjugirano kompleksni (in zato različni), je splošna rešitev enačbe (57) enaka $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Ker pa je $\lambda_1 = a + bi$ in $\lambda_2 = a - bi$, zapišmo splošno rešitev enačbe (57) raje v obliki $y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)e^{ax}$.

Zgled 326 *Zapiši splošno rešitev enačbe $y'' - 5y' + 6y = 0$.*

Enačba $y'' - 5y' + 6y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ z ničlama $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 3$. Torej sta $y_1 = e^{2x}$ in $y_2 = e^{3x}$ linearno neodvisni rešitvi gornje enačbe. Splošna rešitev pa je oblike $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Zgled 327 *Zapiši splošno rešitev enačbe $y'' + 6y' + 9y = 0$.*

Enačba $y''+6y'+9y=0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2+6\lambda+9=0$ z ničlama $\lambda_{1,2}=-3$. Torej sta $y_1=e^{-3x}$ in $y_2=xe^{-3x}$ linearno neodvisni rešitvi gornje enačbe. Splošna rešitev pa je oblike $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$.

Zgled 328 *Zapiši splošno rešitev enačbe* $y''+4y'+10y=0$.

Enačba $y''+4y'+10y=0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2+4\lambda+10=0$ z ničlama $\lambda_{1,2}=-2\pm i\sqrt{6}$. Splošna rešitev je oblike $y=(C_1\sin\sqrt{6}x+C_2\cos\sqrt{6}x)e^{-2x}$.

Zgled 329 *Reši začetni problem* $y''-2y'+10y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=1$.

Karakteristični polinom $\lambda^2-2\lambda+10$ ima ničli $\lambda_{1,2}=1\pm 3i$. Torej je splošna rešitev $y=e^x(A\cos 3x+B\sin 3x)$. Z upoštevanjem začetnih pogojev v y in y' dobimo $A=4$ in $A+3B=1$ oz. $B=-1$. Iskana rešitev je $y=e^x(4\cos 3x-\sin 3x)$. ■

Če v enačbi (58) desna strani ni 0, zapišemo

$$y''+py'+qy=r(x). \tag{59}$$

Rešitev diferencialne enačbe (59) tedaj zapišemo v obliki $y=y_h+y_p$, kjer je y_h splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe

$$y''+py'+qy=r(x),$$

y_p pa katerakoli partikularna rešitev enačbe (59).

Reševanje te enačbe je precej enostavno, če je funkcija r posebne oblike:

$$r(x)=e^{ax}(P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx), \tag{60}$$

kjer sta P in Q polinoma stopnje največ n. (Ta stopnja mora biti dosežena pri vsaj enem od polinomov.) Tedaj poiščemo partikularno rešitev enačbe z nastavkom

$$y_p=x^ke^{ax}(R(x)\cos bx+S(x)\sin bx),$$

kjer sta R in S neznana polinoma stopnje n, število $k\geq 0$ pa red ničle $\lambda=a+bi$ kot ničle karakterističnega polinoma. Če $\lambda=a+bi$ ni njegova ničla, zapišemo $k=0$.

Zgled 330 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y''+9y=81x^2$.

Pridružena homogena enačba $y''+9y=0$ ima karakteristični polinom λ^2+9 z ničlama $\lambda_{1,2}=\pm 3i$. Splošna rešitev homogene enačbe je $C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, nastavek za nehomogeno enačbo pa je $y_p=Ax^2+Bx+C$. Sledi

$$y_p''+9y_p=2A+9(Ax^2+Bx+C)=81x^2,$$

kar nam da $A=9$, $B=0$ in $C=-2$. Dobimo

$$y=y_h+y_p=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+9x^2-2.$$

Če funkcija r ni oblike (60), a jo lahko zapišemo v obliki vsote dveh funkcij, ki sta oblike (60), tj. $r(x)=r_1(x)+r_2(x)$, lahko uporabimo opisano metodo za vsako izmed funkcij r_1 in r_2 posebej, nato pa dobljeni partikularni rešitvi združimo. Natančneje: če je $y_1''+py_1'+qy_1=r_1(x)$ in $y_2''+py_2'+qy_2=r_2(x)$, za $y=y_1+y_2$ velja $y''+py'+qy=r(x)$, kjer je $r=r_1+r_2$.

Zgled 331 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$.

Pridružena homogena enačba $y'' + 2y' + 5y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ z ničlama $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Splošna rešitev homogene enačbe je $y_h = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, nastavek za nehomogeno enačbo pa je

$$y_p = \underbrace{Ae^x}_{\text{k } 16e^x} + \underbrace{B\cos 2x + C\sin 2x}_{\text{k } \sin 2x}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 5y_p &= (Ae^x - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x) + \\ &\quad +2(Ae^x - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x) + \\ &\quad +5(Ae^x + B\cos 2x + C\sin 2x) = \\ &= \underbrace{8A}_{=16} e^x + \underbrace{(B+4C)}_{=0}\cos 2x + \underbrace{(C-4B)}_{=1}\sin 2x. \end{aligned}$$

Torej je $A = 2$, $B = -\frac{4}{17}$ in $C = \frac{1}{17}$. Sledi

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2e^x - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

Zgled 332 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' - 2y' + y = 2e^x + x - 1$.

Pridružena homogena enačba $y'' - 2y' + y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ z dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 1$. Splošna rešitev homogene enačbe je $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Nastavek za homogeno enačbo je

$$y_p = \underbrace{Ax^2e^x}_{\text{k } 2e^x} + \underbrace{Bx + C}_{\text{k } x-1}.$$

(Opozorilo: v členu Ax^2e^x je faktor x^2 dodan zato, ker je $\lambda = 1$ ničla drugega reda karakterističnega polinoma.) Sledi

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= (2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x) - \\ &\quad -2(2Axe^x + Ax^2e^x + B) + \\ &\quad +(Ax^2e^x + Bx + C) = \\ &= \underbrace{2Ae^x}_{=2e^x} + \underbrace{Bx + (C - 2B)}_{=x-1} \end{aligned}$$

Sledi $A = B = C = 1$ in

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + x^2 e^x + x + 1.$$

Zgled 333 *Poišči splošno in partikularno rešitev enačbe* $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ *pri pogojih* $y(0) = 2$ *in* $y'(0) = 0$.

Pridružena homogena enačba $y'' - 3y' + 2y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ z ničlama $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Splošna rešitev homogene enačbe je $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$, nastavek za homogeno enačbo pa je $y_p = Ae^{3x}$. Sledi

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 9Ae^{3x} - 3 \cdot 3Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 2Ae^{3x},$$

kar nam da $A = 1$. Dobimo $y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{3x}$. Ker je $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2$ in $y'(0) = 2C_1 + C_2 + 3 = 0$, izračunamo $C_1 = -4$ in $C_2 = 5$. Iskana rešitev, ki zadošča začetnim pogojem, je torej

$$y = -4e^{2x} + 5e^x + e^{3x}.$$

Zgled 334 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' + 4y = e^{-x}$.

Pridružena homogena enačba $y'' + 4y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 + 4$ z ničlama $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Splošna rešitev homogene enačbe je $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Nastavek za partikularno rešitev je $y_p = Ae^{-x}$, kar nam da $Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = e^{-x}$ in $A = \frac{1}{5}$. Sledi

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^{-x}.$$

Zgled 335 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' + y = \sin x$.

Pridružena homogena enačba $y'' + y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 + 1$ z ničlama $\lambda_{1,2} = \pm i$. Splošna rešitev homogene enačbe je $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Ker je $\sin x = e^{0x} \sin 1x$, ustreza ta desna stran številu $\lambda = 0 + 1i$, ki je ravno ničla karakterističnega polinoma. Torej je nastavek za nehomogeno enačbo enak $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$. Sledi

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos x - xA\sin x + B\sin x + xB\cos x, \\ y_p'' &= -2A\sin x - xA\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x \end{aligned}$$

in od tod

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= -2A\sin x - xA\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \\ &= -2A\sin x + 2B\cos x = \sin x, \end{aligned}$$

kar nam da $A = -\frac{1}{2}$ in $B = 0$. Torej je $y_p = -\frac{1}{2} x \cos x$ in

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

Zgled 336 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

Pridružena homogena enačba $y'' - 2y' + 2y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ z ničlama $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Splošna rešitev homogene enačbe je oblike $y_h = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$. Ker desna stran (tj. izraz $4e^x \sin x$) ustreza ničli $\lambda = 1 + i$, je nastavek oblike $y_p = x(A \cos x + B \sin x)e^x$. Sledi

$$\begin{aligned} y_p' &= ((Ax + A + Bx)\cos x + (Bx + B - Ax)\sin x)e^x \\ y_p'' &= ((2Bx + 2A + 2B)\cos x + (-2Ax + 2B - 2A)\sin x)e^x \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + 2y_p &= ((2Bx + 2A + 2B)\cos x + (2Ax + 2B - 2A)\sin x)e^x - \\ &\quad -2((Ax + A + Bx)\cos x + (Bx + B - Ax)\sin x)e^x + \\ &\quad 2x(A\cos x + B\sin x)e^x = \\ &= (2B\cos x - 2A\sin x)e^x. \end{aligned}$$

Izračunamo $A = -2$ in $B = 0$, kar nam da

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x)e^x.$$

Zgled 337 *Poišči splošno rešitev enačbe* $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Pridružena homogena enačba $y'' - 4y' + 4y = 0$ ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ z dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 2$. Sledi $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. Nastavek za desno stran je $y_p = Ax^2 e^{2x}$. Sledi

$$\begin{aligned} y_p' &= 2A(x^2 + x)e^{2x} \\ y_p'' &= 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x} - 4 \cdot 2A(x^2 + x)e^{2x} + 4 \cdot Ax^2 e^{2x} = \\ &= 2Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Sledi $A = \frac{1}{2}$ in

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}.$$

10.4 Sistemi diferencialnih enačb

Sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda za dve neznani funkciji y_1 in y_2 v splošnem podamo z enačbama

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned} \tag{61}$$

Tak sistem je ekvivalenten eni sami enačbi drugega reda, ki jo dobimo tako, da prvo enačbo odvajamo po neodvisni spremenljivki, potem pa v dobljeno enačbo vstavimo y_2' iz druge enačbe in y_2 iz prve enačbe. Na koncu dobimo $y_1'' = F(x, y_1, y_1')$.

Taka trditev velja tudi v splošnem. Vsak sistem n diferencialnih enačb prvega reda je ekvivalenten diferencialni enačbi n-tega reda. Velja pa tudi obratno. Vsako diferencialno enačbo reda n, ki je zapisana v obliki

$$y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

lahko zapišemo v obliki sistema enačb. Za nove odvisne spremenljivke poleg neznane funkcije $y = y_1$ vzamemo še njene odvode:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Opomniti velja, da je prevedba diferencialne enačbe višjega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda precej običajen postopek pri numeričnem reševanju enačb.

Splošna rešitev sistema (61) je dvoparametrična družina funkcij, ki jo običajno zapišemo v obliki.

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2) \qquad y_2 = y_2(x, C_1, C_2).$$

Partikularno rešitev dobimo tako, da predpišemo začetne vrednosti v dveh točkah; najpogosteje $y_1(x_0) = y_{1,0}$, $y_2(x_0) = y_{2,0}$.

Sistem dveh diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti Naj bodo a, b, c in d realna števila, vsaj eno od števil b ali c naj bo neničelno. Sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + by_2 + f_1(x) \\ y_2' &= cy_1 + dy_2 + f_2(x) \end{aligned} \tag{62}$$

lahko rešimo z metodo eliminacije. Če je npr. $b \neq 0$, lahko iz prve enačbe izrazimo $y_2 = \frac{1}{b}(y_1' - ay_1 - f_1(x))$. Torej je $y_2' = \frac{1}{b}(y_1'' - ay_1' - f_1'(x))$, kar upoštevamo v drugi enačbi. Dobimo

$$\frac{1}{b}(y_1'' - ay_1' - f_1'(x)) = cy_1 + \frac{d}{b}(y_1' - ay_1 - f_1(x)) + f_2(x),$$

kar uredimo v linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti:

$$y_1'' - (a+d)y_1' + (ad - bc)y_1 = bf_2(x) - df_1(x) + f_1'(x).$$

Podobno postopamo, če je $c \neq 0$.

Zgled 338 *Poišči splošno rešitev sistema:*

$$\begin{aligned} y' &= y + z + x, \\ z' &= -4y - 3z + 2x, \end{aligned}$$

kjer sta $y = y(x)$ in $z = z(x)$ neznani funkciji. Zapiši še tisto rešitev, za katero je $y(0) = z(0) = 0$.

Iz prve enačbe izrazimo $z = y' - y - x$. Torej je $z' = y'' - y' - 1$, kar nam da $y'' - y' - 1 = -4y - 3(y' - y - x) + 2x$. Slednje uredimo v

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1. \tag{63}$$

Rešimo enačbo (63). Pridružena homogena enačba

$$y'' + 2y' + y = 0$$

ima karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, ki ima dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = -1$. Torej je

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$$

splošna rešitev pridružene homogene enačbe. Partikularno rešitev dobimo z nastavkom. Ker je desna stran enačbe (63) oblike $5x + 1 = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx)$, kjer je $a = b = 0$ in $P(x) = 5x + 1$ (znan polinom stopnje 1), je ustrezen nastavek oblike

$$y = Ax + B. \tag{64}$$

Ko (64) vstavimo v (63), dobimo

$$2A + Ax + B = 5x + 1.$$

Dobimo $A = 5$ in $2A + B = 1$, zato je $B = -9$. Sledi

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p = \\ &= (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9, \\ z(x) &= y' - y - x = \\ &= (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14. \end{aligned}$$

Nazadnje postavimo $y(0) = 0 = C_1 - 9$ in $z(0) = 0 = C_2 - 2C_1 + 14$, kar nam da $C_1 = 9$ in $C_2 = 4$. ■

Diferencialne enačbe pogosto srečamo pri opisu fizikalnih problemov, ko je neka količina (npr. pot, hitrost, energija, ...) odvisna od časa. Če je torej $x = x(t)$, namesto $\frac{dx}{dt}$ pišemo kar $\dot{x}$, namesto $\frac{d^2x}{dt^2}$ pišemo $\ddot{x}$, ...

Zgled 339 *Poišči splošno rešitev sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + t, \\ \dot{y} &= 2x + y + t, \end{aligned}$$

kjer sta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ neznani funkciji. Poišči še tisto rešitev, za katero je $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Iz prve enačbe sledi $y = \frac{1}{2}(\dot{x} - x - t)$. Torej je $\dot{y} = \frac{1}{2}(\ddot{x} - \dot{x} - 1)$ in

$$\frac{1}{2}(\ddot{x} - \dot{x} - 1) = 2x + \frac{1}{2}(\dot{x} - x - t) + t.$$

Sledi

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = t + 1 \tag{65}$$

K tej enačbi pridružena homogena diferencialna enačba

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$$

ima karakteristični polinom $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Torej je $x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$. Glede na obliko desne strani je nastavek oblike

$$x = At + B,$$

kar nam v (65) da

$$-2A - 3(At + B) = t + 1.$$

Sledi $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{9}$ in

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h + x_p = \\ &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}, \\ y(t) &= \frac{1}{2}(\dot{x} - x - t) = \\ &= -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Nazadnje postavimo $x(0) = 1 = C_1 + C_2 - \frac{1}{9}$ in $y(0) = -1 = -C_1 + C_2 - \frac{1}{9}$, kar nam da $C_1 = 1$ in $C_2 = \frac{1}{9}$.

Zgled 340 *Poišči splošno rešitev sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + 2e^t,\\ \dot{y} &= x + t^2,\end{aligned}$$

kjer sta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ neznani funkciji.

Iz prve enačbe sledi $y = \dot{x} - 2e^t$. Torej $\dot{y} = \ddot{x} - 2e^t$ in $\ddot{x} - x = 2e^t + t^2$. Karakteristični polinom $\lambda^2 - 1$ ima ničli $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Sledi $x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Nastavek za nehomogeno enačbo je

$$x_p = \underbrace{Ate^t}_{\text{k } 2e^t} + \underbrace{Bt^2 + Ct + D}_{\text{k } t^2},$$

kar nam da

$$A(t+2)e^t + 2B - Ate^t - Bt^2 - Ct - D = 2e^t + t^2.$$

Enačbo uredimo v

$$2Ae^t - Bt^2 - Ct + (2B - D) = 2e^t + t^2.$$

kar nam da $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$ in $D = -2$. Nazadnje izpeljemo

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h + x_p =\\ &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2,\\ y(t) &= \dot{x} - 2e^t =\\ &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t.\end{aligned}$$

Zgled 341 *Poišči splošno rešitev sistema:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - 5\cos t,\\ \dot{y} &= 2x + y,\end{aligned}$$

kjer sta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ neznani funkciji.

Iz prve enačbe izrazimo $y = \dot{x} + 5\cos t$. Torej je $\dot{y} = \ddot{x} - 5\sin t$ in $\ddot{x} - 5\sin t = 2x + \dot{x} + 5\cos t$. Sledi

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 5\cos t + 5\sin t.$$

Karakteristični polinom pridružene homogene enačbe je $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Torej je $x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$. Nastavek za partikularno rešitev nehomogene enačbe pa je $x_p = A\cos t + B\sin t$. Sledi

$$-A\cos t - B\sin t - (-A\sin t + B\cos t) - 2(A\cos t + B\sin t) = 5\cos t + 5\sin t,$$

kar uredimo v

$$(-3A - B)\cos t + (-3B + A)\sin t = 5\cos t + 5\sin t.$$

Torej je

$$\begin{aligned}-3A - B &= 5,\\ -3B + A &= 5.\end{aligned}$$

Gornji sistem ima rešitev $A = -1$ in $B = -2$. Torej je $x_p = -\cos t - 2\sin t$. Sledi

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h + x_p =\\ &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \cos t - 2\sin t,\\ y(t) &= \dot{x} + 5\cos t =\\ &= 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + 3\cos t + \sin t.\end{aligned}$$